Michigan State University

National Superconducting Cyclotron Laboratory

ANALYSIS AUF EINER NICHTARCHIMEDISCHEN ERWEITERUNG DER REELLEN ZAHLEN

M. BERZ

MSUCL-753

DECEMBER 1990

MSUCL-753
December, 1990

Analysis auf einer nichtarchimedischen Erweiterung der reellen Zahlen

M. Berz

Zusammenfassung

Eine nichtarchimedische Erweiterung der reellen Zahlen wird vorgestellt. Die Erweiterung ist ein total geordneter Körper und hat ähnliche algebraische Eigenschaften wie die reellen Zahlen; zum Beispiel existieren alle Wurzeln positiver Zablen. Außerdem ist die Erweiterung vollständig in dem Sinne, daß jede Cauchy-Folge konvergiert. Analog erhält man auch eine Erweiterung der komplexen Zahlen; diese ist algebraisch abgeschlossen. Es wird gezeigt, daß die angegebene Erweiterung die kleinstmögliche ist, die die geforderten Eigenschaften hat.

Auf den erweiterten Zahlbereichen kann man Konzepte der Analysis einführen. Zu jeder reellen Funktion gibt es eine Fortsetzung in den neuen Körper mit den gleichen Glattheitseigenschaften. Außerdem kann man in dem Körper uneigentliche Funktionen wie die Deltafunktion auf ganz natürliche Weise einführen. Ähnlich wie in der Nonstandard Analysis kann man die reellen Ableitungen von fortgesetzten Funktionen rem algebra&h durch Ausrechnen des Differenzenquotienten für unendlich kleine Differenz bestimmen. Aussagen wie Zwischenwertsatz, Mittelwertsätze und der Satz von Taylor gelten ähnlich wie fiir reelle Funktionen.

Der erweiterte Zahlkörper erlaubt interessante Anwendungen. Er läßt sich (mit für die Praxis unerheblichen Einschränkungen) auf Neumann-Rechnern implementieren. Dies gilt nicht für die (nichtkonstruktiven) Strukturen der Nonstandard-Analysis, und auch nicht für die intuitiv sehr gut motivierten Konzepte von Schmieden und Laugwitz. Einerseits ist mit der Implementierung des erweiterten Zahlkörpers die rechnerische Behandlung von uneigentlichen Funktionen, insbesondere von Deltafunktionen, möglich. Andererseits ermöglicht die Erweiterung eine elegante, und im Gegensatz zu numerischen Verfahren sehr genaue Bestimmung von Ableitungen. Eine

sehr leistungsfähige Anwendung ist die nun sehr elegante Bestimmung von Bildfehlern hoher Ordnung von optischen Geräten, ein Problem, das derzeit mit keinerlei anderen Verfahren behandelbar ist.

1 Die nichtarchimedischen Körper $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$

1.1 Einführung und Motivation

Die reellen Zahlen verdanken ihre fundamentale Rolle in der Mathematik und den Naturwissenschaften einigen besonderen Eigenschaften. Zunächst kann man mit ihnen rechnen: sie erlauben wie jeder Körper beliebige Arithmetik, mit Ausnahme natürlich der Division durch Null. Weiter eignen sie sich zum Messen; auch das mit dem feinsten Maßstab gewonnene Ergebnis läßt sich durch eine reelle Zahl darstellen.

Diese beiden Grundforderungen können auch mit den rationalen Zahlen verwirklicht werden. Diese versagen allerdings bei gewissen Forderungen der Geometrie wie der Existenz von Wurzeln positiver Zahlen. Um diese zu ermöglichen, muß man mindestens auf die algebraischen Zahlen zurückgreifen.

Die reellen Zahlen zeichnen sich nun dadurch aus, daß auch gewisse transzendente funktionale Zusammenhänge, wie sie insbesondere durch die elementaren Potenzreihen beschreibbar sind, ermöglicht werden. Sie gestatten allerdings nicht direkt die Beschreibung von sogenannten uneigentlichen Funktionen, die in der Physik zum Beispiel bei der Beschreibung einer Punktladung benötigt werden.

Weiterhin ist eines der für die Praxis wichtigsten Konzepte, das der Ableitung, nicht so direkt zugänglich wie zum Beispiel die algebraischen Operationen. So läßt sich in den konventionellen reellen Zahlen das intuitive Konzept des "Differentialquotienten" (Quotient zweier Differentiale, also "unendlich kleiner Größen") von Leibniz nicht rigoros abbilden.

Die beiden zuletzt genannten Probleme würden davon profitieren, wenn es tatsächlich außer den reellen Zahlen auch noch "unendlich kleine" und "unendlich große" Zahlen gäbe, wenn man also eine nichtarchimedische Struktur zugrunde legen würde. Da sich die "Feinstruktur" des Kontinuums der Beobachtung durch den Naturwissenschaftler entzieht, ist dies legitim, solange die wesentlichen Eigenschaften der reellen Zahlen erhalten bleiben.

Es bereitet nun keine Schwierigkeiten, Körpererweiterungen der reellen

Zahlen anzugeben, die nichtarchimedisch sind [siehe z. B. Hewitt-Stromberg, Real Analysis]. Allerdings erfüllten die bisher bekannten nichtarchimedischen Körper meist eine oder mehrere der oben genannten Anforderungen an einen "nützlichen" Körper nicht. Besondere Probleme bereitet dabei die Einführung von transzendenten Funktionen [Davies, Applied Nonstandard Analysis].

Ein ganz neuer Ansatz zum Problem des Unendlichkleinen war die Idee von Schmieden und Laugwitz [Math. Zeitschrift 69, 1958]. Hierbei werden gewisse Äquivalenzklassen von rellen Folgen als neues Zahlenkonzept zugrundegelegt. Der Beweis von Aussagen auf der neuen Menge wird nunmehr als ein logisches Problem angesehen; es wird ein Schema eingeführt, mittels dessen man Aussagen über die reellen Zahlen auf die neue Struktur übertragen kann. So erhält man auf sehr elegante Weise ein Werkzeug, das insbesondere sofort die Bestimmung von Ableitungen als Differentialquotient ermöglicht.

Leider ist die entstehende Struktur kein Körper, es gibt Nullteiler. Außerdem ist der Ring nicht total geordnet. Nun kann man mittels nichtkonstruktiver Verfahren zeigen, daß die Struktur so abgeändert werden kann, daß tatsächlich ein geordneter Körper entsteht. Allerdings ist dann das Vorzeichen mancher nichtverschwindender Elemente prinzipiell unentscheidbar.

Etwas später wurde dann von Robinson [Proc. Royal Acad. Amsterdam, Ser. A, 64, 1961] ein rein auf einem Teilgebiet der mathematischen Logik, der Modelltheorie, fußendes Verfahren entwickelt. Dieses ermöglicht es, eine die Aussagen über reelle Zahlen umfassende Struktur anzugeben, die zusätzlich Aussagen über "unendlich kleine Zahlen" macht.

Diese sehr umfassende Lösung hat den Nachteil, daß sie prinzipiell nichtkonstruktiv ist. Darüberhinaus teilt sie mit der intuitiveren Idee von Schmieden und Laugwitz, daß das Arbeiten mit Differentialen keineswegs algebraisch-automatisch in dem Sinne ist, daß die Arithmetik wie im Falle der reellen Zahlen auf Neumann'schen Rechenautomaten implementiert werden kann.

In dieser Arbeit soll nun eine neue nichtarchimedische Erweiterung der reellen Zahlen untersucht werden. Es wird sich zeigen, daß sie die oben geforderten Eigenschaften hat. Insbesondere ermöglicht sie die Übertragung jeder transzendenten Funktion, und sogar jeder reellen Funktion unter

Beibehaltung der Glattheitseigenschaften.

1.2 Algebraische Struktur

Wir beginnen mit der Definition einer speziellen Familie von Mengen:

Definition 1 (Die Familie der fast-endlichen Mengen) *Eine Teilmenge M der rationalen Zahlen Q heißt fast-endlich, wenn es zu jeder Zahl $r \in Q$ nur endlich viele Elemente von M gibt, die kleiner als r sind. Die Menge aller fast-endlichen Mengen bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$.*

Der folgende Hilfssatz gibt näheren Aufschluß über die Elemente von fast-endlichen Mengen:

Hilfssatz 2 *Sei $M \in \mathcal{F}$. Ist $M \neq \emptyset$, so können die Elemente von M in aufsteigender Reihenfolge geordnet werden, und es gibt also ein Minimum von M. Ist M unendlich, so ist die entstehende streng monotone Folge $\{x_n\}$ divergent.*

Beweis:
Ist die Menge M endlich, so sind ihre Elemente klarerweise in aufsteigender Reihenfolge ordenbar, und die Behauptung ist gezeigt.

Sei also M unendlich. Sei $n \in N$. Setze $M_n = \{x \in Q | x \in M, x \leq n\}$. Dann gilt $M = \bigcup_n M_n$. Weiter sind nach Definition alle M_n endlich oder leer, und somit können die Elemente jedes M_n in aufsteigender Reihenfolge geordnet werden. Diese geordneten Elemente der M_n können nun offenbar den natürlichen Zahlen zugeordnet werden; man beginnt mit M_1 und arbeitet dann nacheinander alle M_n ab, wobei alle schon vorgekommenen Elemente ignoriert werden. Es entsteht eine streng monoton steigende Folge, die alle Elemente von M enthält.

Die Folge besitzt keinen Häufungspunkt, da unterhalb jeder Grenze nur endlich viele Glieder liegen. Da die Folge streng monoton steigend ist, divergiert sie. $\mathcal{QED}$

Hilfssatz 3 *Seien $M, N \in \mathcal{F}$. Dann gilt*

$$X \subset M \Rightarrow X \in \mathcal{F}$$

$$M \cup N \in \mathcal{F}$$

$$M \cap N \in \mathcal{F}$$

$$M + N = \{x + y | x \in M, y \in N\} \in \mathcal{F}$$

$$x \in M + N \Rightarrow \exists \text{ nur endlich viele } (a, b) \in M \times N \text{ mit } x = a + b$$

Beweis:
Die ersten drei Aussagen sind offenbar.

Zum Beweis der vierten Aussage bezeichnen wir mit x_M, x_N die kleinsten Elemente in M bzw. N; diese existieren nach (2). Sei wieder r beliebig aus Q gegeben. Seien

$$M^u = \{x \in M | x < r - x_N\}, \quad N^u = \{x \in N | x < r - x_M\}$$

Setzen weiter

$$M^o = M \setminus M^u, \quad N^o = N \setminus N^u$$

Dann gilt zunächst $M + N = (M^u + N^u) \cup (M^o + N) \cup (M + N^o)$. Nach Konstruktion von M^o, N^o haben aber $(M^o + N)$ und $(M + N^o)$ keine Elemente kleiner als r. Damit können von allen Elementen in $M + N$ also nur diejenigen in $M^u + N^u$ kleiner als r sein. Da aber sowohl M^u als auch N^u nach Konstruktion endlich sind, ist $M^u + N^u$ endlich. Damit gibt es in $M + N$ nur endlich viele Terme kleiner als r.

Zum Beweis der letzten Aussage sei $x \in M+N$ gegeben. Wähle $r = x+1$ und M^u, N^u wie oben. Dann ist $x \notin (M^o + N), x \notin (M + N^o)$. Also treten alle Paare $(a, b) \in M \times N$ mit $x = a + b$ in $M^u \times N^u$ auf, und damit gibt es höchstens endlich viele solche Paare.

Nachdem nun die Familie von Mengen $\mathcal{F}$ diskutiert ist, führen wir eine spezielle Menge von Funktionen auf Q ein:

Definition 4 (Die Mengen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$) *Die Mengen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ werden definiert wie folgt:*

$$\mathcal{R} = \{f : Q \to R | \{x | f(x) \neq 0\} \in \mathcal{F}\}$$
$$\mathcal{C} = \{f : Q \to C | \{x | f(x) \neq 0\} \in \mathcal{F}\}$$

$\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ enthalten also alle diejenigen reellwertigen bzw. komplexwertigen Funktionen auf Q, deren Träger eine fast-endliche Menge ist.

Auf den Körpern $\mathcal{C}$ und $\mathcal{R}$ führen wir nun einige Relationen ein:

Definition 5 (λ, $=_r$, $\sim$, $\approx$) *Seien x, y in $\mathcal{C}$. Dann sagen wir*

$\lambda(x) = \min\{q \in Q | x[q] \neq 0\}$

$x =_r y$, falls $x[q] = y[q]$ für alle $q \leq r$.

Seien x, y nichtnull, und seien q_x, q_y die Minima der Träger von x und y. Dann sagen wir

$x \sim y$, falls $\lambda(x) = \lambda(y)$

$x \approx y$, falls $\lambda(x) = \lambda(y)$ und $x[\lambda(x)] = y[\lambda(y)]$

Hilfssatz 6 *Die Relationen $=_r$, $\sim$ und $\approx$ sind Äquivalenzrelationen. Wir bezeichnen ihre Klassen mit $[\,]_r, [\,]_\sim$ und $[\,]_\approx$. Es gelten die Beziehungen*

$a, b \in Q, a > b, x =_a y \Rightarrow x =_b y$

$x \approx y \Rightarrow x \sim y$

$x \in R, x \neq 0 \Rightarrow x \in [1]_\sim$

Beweis:
Die Beweise ergeben sich direkt aus Definition (5). $\mathcal{QED}$

Offenbar gilt $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$. Im Folgenden bezeichnen wir die Elemente von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ mit x, y, etc. und ihre Funktionswerte an der Stelle $q \in Q$ mit eckigen

Klammern, so zum Beispiel $x[q]$. Dies dient der besseren Unterscheidung, wenn Funktionen auf $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ betrachtet werden.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit bietet sich folgende Notation an:

Definition 7 (Notation für Elemente in $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$) *Nach Hilfssatz (2) sind die Elemente von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ durch eine (falls unendliche, streng divergente) Folge von Trägerpunkten $\{q_n\}$ und eine dazugehörende Folge von Funktionswerten $\{x[q_n]\}$ gekennzeichnet. Das Paar $(\{q_n\}, \{x[q_n]\})$ bezeichnen wir als die Wertetabelle von x.*

Auf den Mengen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ definieren wir nun arithmetische Operationen:

Definition 8 (Addition und Multiplikation auf $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$) *Auf $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ wird die Addition auf übliche Weise komponentenweise definiert:*

$$(x+y)[q] \;=\; x[q]+y[q]$$

Wir definieren eine Multiplikation folgendermaßen: Seien N_x und N_y die Träger von x und y. Wir setzen $(x \cdot y)[q] = 0$, falls $q \notin N_x + N_y$. Ist $q \in N_x + N_y$, so setzen wir

$$(x \cdot y)[q] \;=\; \sum_{\substack{q_x \in N_x,\ q_y \in N_y,\\ q_x + q_y = q}} x[q_x] \cdot y[q_y]$$

Zunächst ist zu bemerken, daß die so definierte Summenfunktion wieder in $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{C}$ ist; denn ihr Träger N_{x+y} ist Teilmenge von $N_x \cup N_y \in \mathcal{F}$, also $N_{x+y} \in \mathcal{F}$ wegen Hilfssatz (3).

Zur Multiplikation ist zu bemerken, daß die Summe in der Definition nur endlich viele Terme enthält, was aus Hilfssatz (3) folgt. Es ist also für die Definition der Multiplikation von entscheidender Bedeutung, daß die Träger von x und y fast-endlich sind; dadurch wird sichergestellt, daß in der Summe stets nur endlich viele Summanden vorkommen.

Weiterhin ist das Produkt wieder in $\mathcal{R}$ beziehungsweise $\mathcal{C}$ enthalten, da für die Trägerpunkte des Produktes gilt $N_{x \cdot y} \subset N_x + N_y$, was nach Hilfssatz (3) in $\mathcal{F}$ ist.

Im Folgenden werden wir zur Vereinfachung die Summe in der Definition der Multiplikation schreiben als

$$(x \cdot y)[q] = \sum_{q_x + q_y = q} x[q_x] \cdot y[q_y]$$

Es wird also über die (höchtens endlich vielen) Paare in $N_x \times N_y$ summiert, deren Summe q ist.

Die so erhaltenen Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ haben nun die Eigenschaft, daß die Tripel $(\mathcal{R},+,\cdot)$ und $(\mathcal{C},+,\cdot)$ Körper werden. Zunächst zeigen wir die Ringstruktur.

Satz 9 (Ringstruktur von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$) *Die Tripel $(\mathcal{R},+,\cdot)$ und $(\mathcal{C},+,\cdot)$ sind kommutative Ringe mit Eins.*

Beweis:
Zeigen die Behauptung für $\mathcal{R}$. Analog ergibt sie sich für $\mathcal{C}$. Offenbar ist $\mathcal{R}$ bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe, wobei das neutrale Element die Funktion $x \equiv 0$ ist; Zu jedem Element x ist das additiv Inverse einfach die negative Funktion $-x$. Diese ist in $\mathcal{R}$, da die Trägerpunkte von $-x$ mit denen von x übereinstimmen.

Die Eins der Multiplikation ist die Funktion, die überall verschwindet außer an $q = 0$, wo sie den Wert 1 hat. Man verifiziert dies direkt mittels der Definition der Multiplikation.

Die Multiplikation ist kommutativ, da

$$(x \cdot y)[q] = \sum_{q_x + q_y = q} x[q_x] \cdot y[q_y] = \sum_{q_y + q_x = q} y[q_y] \cdot x[q_x] = (y \cdot x)[q]$$

Zum Beweis des Assoziativgesetzes betrachte man beliebige Funktionen x, y und z aus $\mathcal{R}$. Dann gilt für $q \in Q$:

$$
\begin{aligned}
((x \cdot y) \cdot z)[q] &= \sum_{q_{x \cdot y}+q_z=q} \left(\sum_{q_x+q_y=q_{x\cdot y}} x[q_x] \cdot y[q_y] \right) \cdot z[q_z] \\
&= \sum_{q_x+q_y+q_z=q} x[q_x] \cdot y[q_y] \cdot z[q_z] \\
&= \sum_{q_x+q_{y\cdot z}=q} x[q_x] \cdot \left(\sum_{q_y+q_z=q_{y\cdot z}} y[q_y] \cdot z[q_z] \right) \\
&= (x \cdot (y \cdot z))[q]
\end{aligned}
$$

Die Manipulationen der Summen durften dabei durchgeführt werden, da sie alle nach Hilfssatz (3) endlich sind.

Der Beweis des Distributivgesetzes ergibt sich analog:

$$
\begin{aligned}
((x + y) \cdot h)[q] &= \sum_{q_{x+y}+q_z=q} (x+y)[q_{x+y}] \cdot z[q_z] \\
&= \sum_{q_x+q_z=q} x[q_x] \cdot z[q_z] + \sum_{q_y+q_z=q} y[q_y] \cdot z[q_z] \\
&= (x \cdot z + y \cdot z)[q]
\end{aligned}
$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß $N_{x+y} \subset N_x \cup N_y$. $\mathcal{QED}$

Der einzige nichttriviale Schritt zum Beweis der Körperstruktur von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ ist der Beweis der Existenz eines multiplikativ Inversen für nichtverschwindende Elemente. Dazu, und für einige andere Beweise, erweist sich der nächste Hilfssatz als leistungsfähiges Hilfsmittel.

Hilfssatz 10 (Fixpunktsatz) *Sei $q_M \in Q$ gegeben. Sei $M \subset \mathcal{R}$ ($M \subset \mathcal{C}$) die Menge aller nichtverschwindenden Elemente x von $\mathcal{R}$ ($\mathcal{C}$), die $\lambda(x) \geq q_M$*

genügen. Sei $f : M \to C$ und $f(M) \subset M$. Existiere $k \in Q$ mit $k > 0$ so, daß für alle x_1, $x_2 \in M$ gilt

$$x_1[p] = x_2[p]\ \forall\ p < q \ \Rightarrow\ f(x_1)[p] = f(x_2)[p]\ \forall\ p < q + k$$

Dann gibt es eine eindeutige Lösung x der Gleichung

$$x = f(x).$$

Anmerkung 11 *Die Aussage und Voraussetzungen des Fixpunktsatzes sind an dieser Stelle ohne weitere Kenntnisse über $\mathcal{R}$ und C vielleicht etwas undurchsichtig. Im Folgenden werden wir erkennen, daß die Bedingung an f lediglich bedeutet, daß f kontrahierend ist mit unendlich kleinem Kontraktionsfaktor. Die Folge a_i im Beweis ist eine Cauchy-Folge, deren Konvergenz wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{R}$ automatisch garantiert ist.*

Beweis:
Wir wählen zunächst $a_0 \in M$ beliebig, und setzen dann rekursiv

$$a_i = f(a_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Dann sind die a_i in M, weil f nach Voraussetzung Elemente von M nach M abbildet. Zeigen zunächst:

$$a_i[p] = a_{i-1}[p]\ \forall\ p < (i-1) \cdot k + q_M \quad \text{(i)}$$

Da $a_0 \in M$, $a_1 \in M$ gilt $a_1[p] = 0 = a_0[p]\ \forall\, p < q_M$, also gilt die Behauptung für $i = 1$. Der Rest folgt durch Induktion bei Anwendung von f auf beiden Seiten der Gleichung.

Definieren nun eine Funktion $x : Q \to C$ folgendermaßen: Sei $q \in Q$ gegeben. Wähle zunächst i so, daß $(i-1) \cdot k + q_M > q$. Setze $x[q] = a_i[q]$. Dies ist eindeutig; denn seien i_1, i_2 gegeben mit $(i_1 - 1) \cdot k + q_M > q$, $(i_2 - 1) \cdot k + q_M > q$. Sei o.B.d.A. $i_1 < i_2$; dann stimmen nach (i) $a_{i_1}[q]$, $a_{i_1+1}[q]$, ... $a_{i_2}[q]$ überein.

Weiter gilt sogar $x[p] = a_i[p]$ für alle $p \leq q$ (ii). Somit ist insbesondere x in $\mathcal{R}$ oder C, da für jedes q seine Trägerpunkte kleiner als q mit denen von einem $a_i \in M$ übereinstimmen. Außerdem ist $x \in M$, da insbesondere $\lambda(x)$ mit $\lambda(a_i)$ übereinstimmt, also größergleich q_M ist.

Zeigen nun: das so definierte x ist eine Lösung der Fixpunktgleichung. Sei also $q \in Q$ gegeben. Sei i so gewählt, daß $(i-1) \cdot k + q_M > q$. Dann gilt

$$x[q] = a_i[q] \text{ und auch } x[p] = a_i[p] = a_{i-1}[p] \ \forall\ p \leq q$$

Damit ist wegen der Eigenschaften von f auch $f(a_{i-1})[p] = f(x)[p] \ \forall\ p \leq q$, und so folgt

$$x[q] = a_i[q] = f(a_{i-1})[q] = f(x)[q],$$

und da q beliebig war, folgt die Behauptung.

Es bleibt zu zeigen, daß der Fixpunkt eindeutig ist. Wir nehmen an, es gäbe zwei Fixpunkte x_1 und x_2, die verschieden sind. Sei $q = \lambda(x_1 - x_2)$, dann gilt also

$$x_1[q] \neq x_2[q], \text{ aber } x_1[p] = x_2[p] \ \forall\ p < q$$

Durch Anwendung von f erhält man

$$f(x_1)[p] = f(x_2)[p] \ \forall\ p < q + k$$

und somit insbesondere $f(x_1)[q] = f(x_2)[q]$. Da aber $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$, folgt also $x_1[q] = x_2[q]$, im Widerspruch zur Voraussetzung. $\mathcal{QED}$

Anmerkung 12 *Trotz des iterativen Charakters des Fixpunktsatzes kann man offenbar zu jedem $q \in Q$ den Wert des Fixpunktes x an q in endlich vielen Schritten bestimmen. Dies ist für praktische Anwendungen von großer Bedeutung.*

Mit Hilfe des Fixpunktsatzes kann nun die Existenz von multiplikativ Inversen relativ einfach gezeigt werden:

Satz 13 (Körperstruktur von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$) *Die Tripel $(\mathcal{R},+,\cdot)$ und $(\mathcal{C},+,\cdot)$ sind Körper.*

Beweis:
Wir führen den Beweis für $\mathcal{R}$; für $\mathcal{C}$ ergibt er sich analog. Es genügt, die Existenz von multiplikativ Inversen zu zeigen. Zunächst betrachten wir Funktionen $s_{q,a}$, die nur an einer einzigen Stelle q von Null verschieden sind und dort den Wert $a \neq 0$ annehmen. Man zeigt dann direkt, daß diese Funktionen Inverse haben, es gilt nämlich $s_{q,a} \cdot s_{-q,\frac{1}{a}} = 1_{\mathcal{R}}$, wie man sehr leicht nachrechnet.

Sei nun $z \in \mathcal{R}$ gegeben. Sei $q = lambda(z)$ und sei $a = z[q]$. Setzen $z^* = s_{-q,1/a} \cdot z$. Dann ist $\lambda(z^*) = 0$ und $z^*[0] = 1$. Nun genügt es, für z^* ein multiplikativ Inverses zu finden; denn dann ist $s_{-q,1/a}(z^*)^{-1}$ ein Inverses zu z. Schreiben $z^* = 1 + y$. Ist $y = 0$, so ist alles gezeigt. Andernfalls ist $k = \lambda(y) > 0$. Es genügt nun, x zu finden, sodaß

$$(1+x)\cdot(1+y) = 1$$

Durch Umschreiben unter Beachtung der Ringeigenschaften ergibt sich die äquivalente Form

$$x = y \cdot x - y$$

Dies ist ein Fixpunktproblem mit der Funktion $f(x) = y \cdot x - y$. Sei $M = \{x \in \mathcal{R} | \lambda(x) \geq k\}$. Dann gilt offenbar $f(M) \subset M$. Seien nun x_1, x_2 aus $\mathcal{C}$ gegeben mit $x_1[p] = x_2[p]\ \forall\, p < q$. Weil y kleinste Nichnullstelle k hat, folgt dann aus der Definition der Multiplikation, daß

$$(y \cdot x_1)[p] = (y \cdot x_2)[p]\ \forall\, p < q + k$$

und durch Subtraktion von y sogar

$$(y \cdot x_1 - y)[p] = (y \cdot x_2 - y)[p]\ \forall\, p < q + k,$$

womit gezeigt ist, daß die Funktion f die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes (10) erfüllt. Somit gibt es ein x mit $f(x) = x$, und dies ist die gesuchte Lösung. $\mathcal{QED}$

Die Körper $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ stellen echte Erweiterungen von R und C dar, wie der nächste Satz zeigt:

Satz 14 (Einbettung von R in $\mathcal{R}$ und C in $\mathcal{C}$) *R kann in $\mathcal{R}$ und C in $\mathcal{C}$ eingebettet werden. Dabei bleiben die algebraischen Eigenschaften erhalten.*

Beweis:
Sei $x \in C$. Setze $\Pi(x) = s_{0,x}$, wobei s die Elemente aus dem Beweis zu Satz (13) sind. Dann ist $\Pi(x)$ in $\mathcal{C}$. Ist x sogar aus R, so ist auch $\Pi(x)$ aus $\mathcal{R}$. Offenbar ist Π injektiv. Man überzeugt sich weiter direkt, daß $\Pi(x+y) = \Pi(x) + \Pi(y)$ und $\Pi(x \cdot y) = \Pi(x) \cdot \Pi(y)$. Somit sind also R und C isomorph in Unterkörper von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ eingebettet. Die Abbildung ist nicht surjektiv, da zum Beispiel $s_{1,1}$ nicht angenommen wird. $\mathcal{QED}$

Anmerkung 15 *Wir merken an, daß es jedes Element aus $\mathcal{C}$ nun offenbar eindeutig geschrieben werden kann als $a + b \cdot i$, wobei i die imaginäre Einheit aus C ist und $a, b \in \mathcal{R}$.*

Wir haben nun gezeigt, daß $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ die bekannten reellen bzw. komplexen Zahlen enthalten, aber auch noch wesentlich mehr Elemente. Daß die entstehenden Strukturen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ aber mengentheoretisch nicht größer als R sind, zeigt der nächste Satz.

Satz 16 ($\mathcal{C}$ und R sind gleichmächtig) *Die Menge $\mathcal{C}$ hat die gleiche Kardinalität wie die reellen Zahlen*

Beweis:
Offenbar gilt $\text{card}(R) = c \leq \text{card}(\mathcal{C})$, da R in $\mathcal{C}$ injektiv abgebildet werden kann.

Jedes Element von $\mathcal{C}$ ist eindeutig durch eine Folge von Trägerpunkten und zwei Funktionswerten (Realteil und Imaginärteil), also eine Funktion $N \to R^3$ gegeben; sollte das Element in $\mathcal{C}$ nur endlich viele Trägerpunkte haben, können die Folgenglieder nach dem letzten Trägerpunkt als $(0,0,0)$ gewählt werden. Damit folgt also nach den bekannten Rechenregeln für Kardinalzahlen (siehe zum Beispiel Hewitt-Stromberg, Real Analysis)

$$\text{card}(\mathcal{C}) \leq (c^3)^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$$

somit gilt also $\text{card}(R) = c \leq \text{card}(\mathcal{C}) \leq \text{card}(R)$, also $\text{card}(R) = \text{card}(\mathcal{C})$. $\mathcal{QED}$

Schließlich definieren wir auch noch den Vektorraum $\mathcal{R}^n$:

Definition 17 (Der Vektorraum $\mathcal{R}^n$) *Wir definieren die Menge $\mathcal{R}^n$ als die Menge aller Funktionen der Menge $\{1, ..., n\}$ nach $\mathcal{R}$. Auf diesen Funktionen definieren wir eine Addition und eine skalare Multiplikation mit Elementen aus $\mathcal{R}$ komponentenweise. Damit wird $\mathcal{R}^n$ zu einem Vektorraum über $\mathcal{R}$.*

Nun untersuchen wir $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ bezüglich der Existenz von Wurzeln. Es zeigt sich, daß die Körper $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ den Körpern R und C bezüglich der Existenz von Wurzeln entsprechen. Dies zeigt der nächste Satz.

Satz 18 (Existenz von Wurzeln in $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$) *Sei $z \in \mathcal{R}$. Falls $z \neq 0$, sei $q = \lambda(z)$. Ist n gerade, so hat z zwei n-te Wurzeln in $\mathcal{R}$, falls $z[q]$ positiv ist, eine n-te Wurzel, falls $z = 0$, und keine n-te Wurzel in $\mathcal{R}$, falls $z[q]$ negativ ist. Ist n ungerade, so gibt es zu jedem z genau eine n-te Wurzel in $\mathcal{R}$.*

Sei $z \in \mathcal{C}$. Ist $z = 0$, so besitzt z eine n-te Wurzel. Ist $z \neq 0$, dann besitzt z genau n n-te Wurzeln in $\mathcal{C}$.

Beweis:
Zunächst betrachten wir die Elemente $s_{q,a}$ (siehe Beweis zu Satz (13)) aus $\mathcal{R}$ oder $\mathcal{C}$. Offenbar existieren deren n-te Wurzeln genau dann, wenn die n-ten Wurzeln von a in R oder C existieren; denn dann sind sie gegeben durch $s_{q/n, \sqrt[n]{a}}$. Damit ist die Aussage für alle $s_{q,a}$ gezeigt.

Sei nun z in $\mathcal{R}$ oder $\mathcal{C}$ gegeben. Ist $z = 0$, so gilt die Behauptung offenbar. Sei also $z \neq 0$. Sei $q = \lambda(z)$, sei $a = z[q]$. Dann schreiben wir $z = s_{q,a} \cdot Z$, wobei $\lambda(Z) = 0$ und $Z[0] = 1$ gilt. Nun genügt es zu zeigen, daß ein derartiges $Z \in \mathcal{C}$ genau eine n-te Wurzel besitzt, und daß diese in $\mathcal{R}$ ist, falls $Z \in \mathcal{R}$. Schreiben $Z = 1 + y$. Ist $y = 0$, so ist alles gezeigt. Andernfalls sei $\lambda(y) = k_y$, dann ist $k_y > 0$. Suchen nun x so, daß

$$(1 + x)^n = 1 + y$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man die äquivalente Darstellung

$$1 + nx + x^2 \cdot P(x) = 1 + y,$$

wobei $P(x)$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten ist. Insbesondere ist der $\lambda(P(x)) \geq 0$ für jedes x. Dies kann als Fixpunktproblem $x = f(x)$ geschrieben werden, wobei

$$f(x) = \frac{y}{n} - x^2 \cdot \frac{P(x)}{n}$$

Sei nun M die Menge aller nichtverschwindenden Zahlen aus $\mathcal{C}$ (beziehungsweise aus $\mathcal{R}$, falls $z \in \mathcal{R}$), deren kleinster Trägerpunkt k_y nicht unterschreitet. Dann gilt $f(M) \subset M$; denn sei $x \in M$. Dann ist $\lambda(x^2 \cdot P(x)) \geq 2 \cdot k_y$, also größer als k_y. Somit hat dann $f(x) = y/n - x^2 \cdot P(x)/n$ als kleinsten Trägerpunkt k_y, liegt also in M. Somit genügt M den Voraussetzungen des Fixpunktsatzes

Seien nun x_1, x_2 aus M gegeben und sei $x_1[p] = x_2[p] \;\forall\, p < q$. Dann ist $\lambda(x_1) \geq k_y$, $\lambda(x_2) \geq k_y$. Aus der Definition der Multiplikation ergibt sich dann, daß x_1^2 und x_2^2 sogar für alle $p < q + k_y$ übereinstimmen. Denn sei $p < q+k_y$. Da $x_1 \in M$, gibt es keinen Trägerpunkt von x_1, der kleiner als k_y sind. So tragen nach der Definition der Multiplikation zu $x_1^2[p]$ nur Faktoren $x_1[p]$ bei, bei denen $p < q$. Da diese für x_1 und x_2 übereinstimmen, folgt die Behauptung.

Da $P(x)$ für $x \in M$ keine negativen Trägerpunkte hat, stimmen somit auch $x_1^2 \cdot P(x_1)$ und $x_2^2 \cdot P(x_2)$ für $p < q + k_y$ überein. Durch Subtraktion von $\frac{y}{n}$ ergibt sich dann, daß f auf M die im Fixpunktsatz (10) geforderte Eigenschaft mit $k = k_y$ hat. Somit gibt es einen eindeutigen Fixpunkt von $x = f(x)$, und dieser ist die eindeutige Lösung von $(1+x)^n = 1 + y$. $\mathcal{QED}$

Zum Abschluß dieses Abschnittes über die algebraischen Eigenschaften von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ wollen wir zeigen, daß $\mathcal{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Dieses Ergebnis erhält man hier mit relativ geringem Aufwand unter Verwendung des Fixpunktsatzes; allerdings wird im Beweis das entsprechende Resultat für C verwendet, sodaß dennoch tiefliegendere Erkenntnisse dahinterstehen.

Satz 19 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom mit Koeffizienten aus $\mathcal{C}$ hat eine Nullstelle.*

Beweis:

Seien a_ν, $\nu = 0, ..., n$, die Koeffizienten des Polynoms $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot x^\nu$

mit Grad n. Ist zunächst $a_0 = 0$, so ist $x = 0$ eine Nullstelle, und die Aussage ist gezeigt. Sei also $a_0 \neq 0$. Multipliziere nun das Polynom mit einem Faktor, sodaß $\lambda(a_0) = 0$. Dies ändert die Nullstellen des Polynoms nicht. Sei nun $r = \min_{\nu \geq 1}(\lambda(a_\nu)/\nu)$, und sei j ein Index, an dem das Minimum angenommen wird. Mache nun eine erste Substitution $x \to s_{-r,1} \cdot x$, wobei s die Zahl aus dem Beweis zu Satz (13) ist. Dann verändern sich die Koeffizienten a_ν gemäß $a_\nu \to a_\nu \cdot s_{-\nu r,1}$, und es genügt, eine Nullstelle des neuen Polynoms zu suchen. Weiter gilt nach Wahl von r für die neuen Koeffizienten $\lambda(a_\nu) \geq 0$ und $\lambda(a_0) = \lambda(a_j) = 0$. Schreibe nun $a_\nu = b_\nu + c_\nu$, wobei $b_\nu = a_\nu[0]$ komplexe Zahlen sind. Dem Polynom P sei dann das komplexe Polynom $P_C = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \cdot x^\nu$ zugeordnet. Dann ist P_C wegen $b_0 \neq 0$, $b_j \neq 0$ nicht konstant.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Ableitung P'_C von $P_C d$ an $x = 1$ nicht verschwindet, also $\sum_{\nu=0}^{n} \nu \cdot b_\nu \neq 0$. Denn ist die Bedingung nicht erfüllt, so wählen wir ϵ so, daß in $U_\epsilon(1) \subset C$ keine weiteren Nullstellen von P'_C liegen; dies ist möglich, da P'_C als komplexes Polynom wegen $b_j \neq 0$ nicht verschwindet und somit nur endlich viele Nullstellen hat. Machen nun im Polynom P eine Substitution $x \to x+\xi$, $\xi \in R$, $0 < \xi < \epsilon$. Diese hat offenbar keinen Einfluß auf die Zahl von Nullstellen von P. Da ξ rein reell ist, gilt auch für die neuen Koeffizienten von P, daß $\lambda(a_\nu) \geq 0$. Da weiter offenbar die Werte $a_\nu[0]$ stetig von ξ abhängen, kann durch hinreichend kleine Wahl von ξ erreicht werden, daß nach wie vor $b_0 = a_0[0] \neq 0$ und $b_j = a_j[0] \neq 0$, aber nun auch $\sum_{\nu=0}^{n} \nu \cdot b_\nu \neq 0$.

Da P_C ein nichtkonstantes Polynom auf C ist, hat es nach dem Fundamentalsatz der Algebra für C eine Nullstelle $X \in C$.

Sei nun $q = \min(\lambda(c_\nu))$, $s = P(X) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \cdot X^\nu$. Ist $s = 0$, so ist offenbar X auch eine Nullstelle von P, und alles ist gezeigt. Andernfalls gilt $\lambda(s) \geq q$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt sogar $\lambda(s) = q$; denn ist dem nicht so, so machen wir eine erneute Substitution, diesmal $x \to x/(1 + d^q)$. Dann verändern sich die Koeffizienten a_ν gemäß $a_\nu \to a_\nu(1 + d^q)^\nu$, also $b_\nu \to b_\nu$ und $c_\nu[q] \to c_\nu[q] + \nu \cdot b_\nu$, und somit schließlich $s[q] \to s[q] + \sum_{\nu=0}^{n} \nu \cdot b_\nu$. Wegen des Nichtverschwindens von $\sum_{\nu=0}^{n} \nu \cdot b_\nu$ verändert sich also sicherlich $s[q]$, sodaß es nun nicht mehr verschwindet.

Nach diesen Vorbereitungen wird es möglich sein, den Fixpunktsatz anzuwenden. Wie schon bei der Bestimmung der Inversen und der Wurzeln suchen wir die gewünschte Zahl aus C durch "in der Nähe" der klassischen Lösung X. Wir suchen also ein x so, daß $P(X+x)=0$. Zu diesem Zweck schreiben wir

$$P(X+x) = P(X) + x \cdot P'(X) + x^2 \cdot \frac{P''(X)}{2} + ... + x^n \cdot \frac{P^{(n)}}{n!}$$

Hierbei sind die $P^{(\nu)}$ die formalen Ableitungen des Polynoms P, und es wurde der Taylor'sche Satz für Polynome verwendet, der ja bekanntlich für Polynome über beliebigem Grundkörper gilt.

Da $P^{(\nu)}(X)[0] = P_C^{(\nu)}(X)$ und nicht alle Ableitungen von P_C verschwinden, gibt es ein k, sodaß $P^{(k)}(X)[0] \neq 0$ und $P^{(\nu)}(X)[0] = 0$ $(1 \leq \nu < k)$. Sei nun t eine k-te Wurzel von s, die nach Satz (18) existiert. Sei weiterhin $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, wobei

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{\frac{P'(X)}{1!} + x \cdot \frac{P''(X)}{2!} + ... + x^{k-2} \cdot \frac{P^{(k-1)}(X)}{(k-1)!}}{P^{(k)}(X) \cdot s} \\ u_2(x) &= \frac{x^k}{s} \cdot \frac{\frac{P^{(k+1)}(X)}{(k+1)!} + x \cdot \frac{P^{(k+2)}(X)}{(k+2)!} + ... + x^{(n-k)} \cdot \frac{P^{(n)}(X)}{n!}}{P^{(k)}(X)} \end{aligned}$$

Dann genügt es, eine Lösung zu finden von

$$x = t \cdot \sqrt[k]{1 - x \cdot u(x)},$$

wie man durch Potenzieren und Umformung nachweist. Dies ist ein Fixpunktproblem der Form $x = f(x)$.

Offenbar gilt $\lambda(t) = \lambda(s)/k > 0$. Sei nun $M = \{x | \lambda(x) \geq \lambda(t)\}$. Da $\lambda(P^{(k)}(X)) = 0$, und $\lambda(P^{(\nu)}(X)) \geq q = \lambda(s)$, gilt $\lambda(u_1(x)) \geq 0$ für alle $x \in M$. Da weiterhin für alle $x \in M$ gilt, daß $\lambda(x^k) \geq \lambda(t^k) = \lambda(s)$, gilt $\lambda(x^k/s) \geq 0$. Somit gilt insgesamt auch $\lambda(u_2(x)) \geq 0$, also $\lambda(u(x)) \geq 0$ für alle $x \in M$.

Seien nun x_1, x_2 aus M gegeben, und sei $x_1 =_p x_2$. Dann $1 - x_1 \cdot u(x_1) =_p 1 - x_2 \cdot u(x_2)$. Weiter gilt auch $\sqrt[k]{1 - x_1 \cdot u(x_1)} =_p \sqrt[k]{1 - x_2 \cdot u(x_2)}$, wie man sofort durch Annahme des Gegenteils und Potenzieren zeigt. Somit gilt sogar $t \cdot \sqrt[k]{1 - x_1 \cdot u(x_1)} =_{p+\lambda(t)} t \cdot \sqrt[k]{1 - x_2 \cdot u(x_2)}$. Da $\lambda(t) > 0$, sind somit die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt. Es gibt also einen Fixpunkt, und damit hat das ursprüngliche Polynom eine Wurzel. $\mathcal{QED}$

1.3 Ordnungsstruktur

Im letzen Abschnitt wurde gezeigt, daß $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ sich in ihren algebraischen Eigenschaften nicht wesentlich von R und C unterscheiden. In diesem Abschnitt wenden wir uns nun der Frage nach Ordnungsstrukturen zu.

Die Einführung einer Ordnungsstruktur erfolgt am einfachsten, indem man zunächst "positive" Zahlen einführt:

Definition 20 (Die Menge $\mathcal{R}^+$) *Die Menge $\mathcal{R}^+$ sei die Menge aller derjenigen nichtverschwindenden Elemente von $\mathcal{R}$, deren Funktionswert am kleinsten Trägerpunkt positiv ist.*

Hilfssatz 21 (Eigenschaften von $\mathcal{R}^+$) *Die Menge $\mathcal{R}^+$ hat folgende Eigenschaften:*

$$\mathcal{R}^+ \cap (-\mathcal{R}^+) = \emptyset, \; \mathcal{R}^+ \cap \{0\} = \emptyset$$

$$\mathcal{R}^+ \cup \{0\} \cup (-\mathcal{R}^+) = \mathcal{R}$$

$$x, y \in \mathcal{R}^+ \;\Rightarrow\; x + y \in \mathcal{R}^+,$$

$$x, y \in \mathcal{R}^+ \;\Rightarrow\; x \cdot y \in \mathcal{R}^+$$

Beweis:
Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus der Definition von $\mathcal{R}^+$.

Zum Beweis der dritten Aussage nehmen wir zuerst an, daß $\lambda(x) = \lambda(y) = q$. Da nach Voraussetzung $x[q] > 0$ und $y[q] > 0$, gilt $(x + y)[q] > 0$. Weiter ist q offenbar der kleinste Trägerpunkt von $(x + y)$, und somit gilt $(x + y) \in \mathcal{R}^+$. Gelte nun $\lambda(x) \neq \lambda(y)$, o.B.d.A. $\lambda(x) < \lambda(y)$. Dann ist $\lambda(x + y) = \lambda(x)$ und es gilt $(x + y)[\lambda(x)] = x[\lambda(x)] > 0$, und somit auch $(x + y) \in \mathcal{R}^+$.

Zum Beweis der vierten Aussage bemerken wir, daß für den kleinsten Trägerpunkt des Produktes gilt $\lambda(x \cdot y) = \lambda(x) + \lambda(y)$. Weiter gilt $(x \cdot y)[\lambda(x \cdot y)] = x[\lambda(x)] \cdot y[\lambda(y)] > 0$, und somit $(x + y) \in \mathcal{R}^+$. $\mathcal{QED}$

Mittels der Definition von $\mathcal{R}^+$ läßt sich nun leicht eine Anordnung auf $\mathcal{R}$ einführen:

Definition 22 (Anordnung auf $\mathcal{R}$) *Seien x,y Elemente von $\mathcal{R}$. Dann sagen wir $x > y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathcal{R}^+$. Weiter sagen wir $x < y$, wenn $y < x$.*

Diese Definition der Ordnungsrelationen hat zur Konsequenz, daß $\mathcal{R}$ ein total geordneter Körper ist:

Satz 23 (Eigenschaften der Ordnung) *Das Tripel $(\mathcal{R},+,\cdot)$ wird durch die Ordnungsrelationen in Definition (22) ein total geordneter Körper, das heißt*

Für beliebige x,y gilt genau eine der drei Aussagen $x < y$, $x = y$, $x > y$

Für beliebige x,y,z mit $x > y$, $y > z$ gilt $x > z$.

Weiterhin ist die Ordnung mit der algebraischen Struktur auf $\mathcal{R}$ verträglich, das heißt:

Für beliebige x,y,z gilt $x > y \Rightarrow x + z > y + z$

Für beliebige x,y,z, $z > 0$ gilt $x > y \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$

Beweis:
Die erste Aussage folgt direkt aus Satz (21).

Zum Beweis der zweiten Aussage schreibt man $x - z = (x - y) + (y - z)$. Nach Voraussetzung gilt $x - y \in \mathcal{R}^+$, $y - z \in \mathcal{R}^+$, und somit folgt wegen Satz (21) die Behauptung.

Die dritte Aussage ergibt sich wegen $(x + z) - (y + z) = x - y \in \mathcal{R}^+$.

Die letzte Aussage ergibt sich analog zur zweiten wegen $(x \cdot z) - (y \cdot z) = z \cdot (x - y)$. Da $z \in \mathcal{R}^+$ und $(x - y) \in \mathcal{R}^+$ nach Voraussetzung, folgt nach

Satz (21) die Behauptung. $\mathcal{QED}$

Man erhält sofort:

Korollar 24 *Die Einbettung* Π *aus Satz (14) ist mit der Ordnungsrelation verträglich, also* $x < y \Rightarrow \Pi(x) < \Pi(y)$

Anmerkung 25 *Wir bemerken, daß die Zahlen* $\mathcal{C}$ *genau wie* C *nicht anordenbar sind.*

Damit stellt $\mathcal{R}$, ähnlich wie die komplexen Zahlen, eine echte Körpererweiterung der reellen Zahlen dar.

Zu beachten ist, daß dies nicht im Widerspruch zu der Einzigartigkeit der komplexen Zahlen als Erweiterung der reellen Zahlen steht. Der Satz von Frobenius schließt lediglich die Existenz eines weiteren Körpers auf R^n für alle n aus. $\mathcal{R}$ ist aber, betrachtet als Vektorraum, unendlichdimensional.

Nun zeigen wir, daß $\mathcal{R}$ tatsächlich "unendlich kleine" und "unendlich große" Zahlen enthält:

Definition 26 (Das Element d) *Wir definieren die Zahl* $d \in \mathcal{R}$ *folgendermaßen:*

$$d[q] = \begin{cases} 1 & \textit{falls } q = 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Wir bemerken, daß $s_{a,m/n} = a \cdot d^{m/n} = a \cdot \sqrt[n]{d^m}$, wobei $s_{a,b}$ die Funktionen aus dem Beweis zu Satz (13) sind.

Korollar 27 *Das Element* d^r *ist unendlich klein für alle* $r > 0$, *das heißt für alle* $x > 0, x \in R$ *gilt* $-x < d^r < x$. *Entsprechend ist* d^r *unendlich groß für negative* r, *d.h. für alle* $x \in R$ *gilt* $d^r > x$.

Beweis:
Der Beweis ergibt sich direkt aus der Definition der Ordnungsrelationen. $\mathcal{QED}$

Die soeben eingeführten Elemente d^r sind nicht die einzigen unendlich kleinen Element in $\mathcal{R}$; tatsächlich sind alle Funktionen, deren Träger positives Minimum hat, unendlich klein. Wir bezeichnen alle derartigen Elemente als Differentiale.

Korollar 28 *Der Körper $\mathcal{R}$ ist nichtarchimedisch, das heißt, es gibt Elemente, die von keinem $n \in N$ übertroffen werden.*

Beweis:
Es gilt zum Beispiel $n < d^{-1}\ \forall\ n \in N$. $\mathcal{QED}$

Eine der Konsequenzen aus der Nichtarchimedizität von $\mathcal{R}$ ist die Tatsache, daß das Prinzip vom Dedekind'schen Schnitt und die Existenz von Suprema nicht mehr gilt:

Beispiel 29 (Dedekind'sche Schnitte und Suprema) *Wählen zwei Mengen M_u, M_o wie folgt:*

$$M_u = \{x \in \mathcal{R}\ |x < 0 \text{ und } x \text{ nicht unendlich klein}\}$$

$$M_o = \mathcal{R} \setminus M_u$$

Dann gilt offenbar $M_u \cup M_o = \mathcal{R}$, und es gilt $M_u < M_o$ und $M_u \neq \emptyset \neq M_o$. Dennoch gibt es keine Schnittzahl s mit $M_u \leq s \leq M_o$. Denn angenommen, s wäre eine Schnittzahl.

Ist s positiv oder Null, so liegt es in M_o; aber $-d$ liegt auch in M_o und ist kleiner als s, weswegen $s \not\leq M_o$.

Ist s negativ und nicht unendlich klein, so liegt s in M_u. Da dann aber auch $s/2$ negativ und nicht unendlich klein und damit in M_u ist, aber $s/2 > s$, folgt $M_u \not\leq s$.

Ist schließlich s negativ und unendlich klein. Dann liegt s in M_o, aber $2 \cdot s$ liegt auch in M_o und $2 \cdot s < s$, womit $s \not\leq M_o$.

Somit gibt es eine Schnittzahl s nicht. Weiter hat die Menge M_u auch kein Supremum; sie ist beschränkt durch jedes Element von M_o, es gelingt aber nicht, aus diesen eine kleinste obere Schranke auszuwählen.

Anmerkung 30 *Wir merken an, daß die Nichtexistenz von Supremas nicht nur für $\mathcal{R}$ typisch ist; offenbar läßt sich die Argumentation analog in jedem nichtarchimedischen total geordneten Körper führen, wenn d als ein beliebiges unendlich kleines Element gewählt wird.*

Daß die Differentiale, und insbesondere die oben definierte Zahl d, dem intuitiven Begriff des Differentials von Leibniz entspricht, ist eine wesentliche Eigenschaft des Körpers $\mathcal{R}$ und wird weiter unten ausführlich diskutiert. Hier geben wir zur Motivation lediglich ein kleines Beispiel.

Beispiel 31 (Bestimmung von Ableitungen mittels Differentialen) *Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 - 2x$. f ist auf R differenzierbar, und es gilt $f'(x) = 2x - 2$. Wie wir wissen, kann man gewisse Annäherungen an die Ableitung der Funktion am Ort x dadurch erhalten, daß man den Differenzenquotienten $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ am Ort x berechnet. Grob gesprochen wird dabei die Genauigkeit immer besser, je kleiner Δx wird. In unserem erweiterten Körper $\mathcal{R}$ haben wir nun unendlich kleine Größen zur Verfügung, und daher liegt es nahe, den Differenzenquotienten für solch eine unendlich kleine Zahl zu berechnen, zum Beispiel für $\Delta x = d$. Man erhält*

$$\frac{f(x+d) - f(x)}{d} = \frac{(x^2 + 2xd + d^2 - 2x - 2d) - (x^2 - 2x)}{d} = 2x - 2 + d$$

Man sieht also, daß sich der Differenzenquotient jetzt nur noch um eine unendlich kleine Zahl von dem exakten Wert der Ableitung unterscheidet. Ist man lediglich an der üblichen reellen Ableitung der reellen Funktion interessiert, so ist dieser durch den "Realteil" des Differenzenquotienten exakt gegeben.

Dies ist von großer grundlegender und auch praktischer Bedeutung. Einerseits ermöglicht es, Differentiationen durch algebraische Operationen zu ersetzen.

Da aber die gesamte Algebra auf $\mathcal{R}$ direkt auf Rechenmaschinen implementierbar ist, wie wir später zeigen werden, können nun numerisch exakte Ableitungen bestimmt werden. Dies stellt eine drastische Verbesserung gegenüber allen numerischen Differenzenverfahren zur Berechnung von Ableitungen dar.

1.4 Topologische Struktur

In diesem Abschnitt werden wir $\mathcal{R}$ und die verwandten Körper auf ihre topologische Struktur hin untersuchen. Es wird sich zeigen, daß es auf $\mathcal{R}$ im Gegensatz zu den reellen Zahlen möglich ist, verschiedene nichttriviale Topologien einzuführen, die alle gewisse Vorzüge haben. Wir beginnen mit der Einführung eines Betrages; dabei gehen wir genau wie in jedem anderen total geordneten Raum vor.

Definition 32 (Betrag auf $\mathcal{R}$) *Sei $x \in \mathcal{R}$. Dann definieren wir zu x den Betrag von x folgendermaßen:*

Ist $x \geq 0$, so setzen wir $|x| = x$.

Ist dagegen $x < 0$, so setzen wir $|x| = -x$.

Da der Träger von $|x|$ mit dem von x übereinstimmen, ist zunächst sichergestellt, daß $|x| \in \mathcal{R}$.

Hilfssatz 33 (Eigenschaften des Betrages) *Die Abbildung "$|\ |$" von $\mathcal{R}$ nach $\mathcal{R}$ genügt den Bedingungen*

$|0| = 0$

$|x| > 0$ *falls* $x \neq 0$

$|x| = |-x|$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x-y|$$

Beweis:
Die ersten drei Aussagen sind offensichtlich. Zum Beweis der vierten Aussage muß man lediglich die verschiedenen Fälle betrachten, die durch verschiedene Vorzeichen von x und y entstehen.

Zum Beweis der Dreiecksungleichung bemerken wir zunächst, daß für beliebiges x stets gilt $-|x| \leq x \leq |x|$. Addiert man diese Aussage angewandt auf x und y, so ergibt sich

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|), \text{ also } |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Die letzte Aussage folgt direkt aus der Dreiecksungleichung, da

$$|x| \leq |x-y| + |y|, \text{ also } |x| - |y| \leq |x-y|.$$

Analog folgt $|x-y| \geq -(|x| - |y|) = (|x| - |y|)$, und so die Behauptung.
$\mathcal{QED}$

Definition 34 (Betrag auf $\mathcal{C}$ und $\mathcal{R}^n$) *Auf $\mathcal{C}$ und $\mathcal{R}^n$ definieren wir Beträge wie folgt: wir schreiben das Element z aus $\mathcal{C}$ als $a + bi$, $a, b \in \mathcal{R}$. Man überzeugt sich leicht, daß dies auf eindeutige Weise möglich ist. Dann setzen wir*

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Weiter schreiben wir

$$|(x_1, ..., x_n)| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Die Wurzeln existieren nach Satz (18).

Wie stets auf total geordneten Räumen kann man nun die sogenannte natürliche Topologie einführen:

Definition 35 (Natürliche Topologie) *Wir nennen eine Teilmenge M von $\mathcal{R}$, C oder $\mathcal{R}^n$ offen, falls es zu jedem Element x_0 von M ein $\epsilon > 0$ aus $\mathcal{R}$ so gibt, daß alle x mit $|x - x_0| < \epsilon$ in M liegen.*

Die Topologie hat also als Basis alle ϵ-Kugeln. Man erhält:

Hilfssatz 36 (Eigenschaften der natürlichen Topologie) *Mit der obigen Topologie werden $\mathcal{R}$, C und $\mathcal{R}^n$ nichtzusammenhängende topologische Räume. Es sind Hausdorff-Räume. Sie haben keine abzählbaren Basen. Die durch die feine natürliche Topologie auf R, C bzw. $\mathcal{R}^n$ induzierte Relativtopologie ist diskret. Die Topologie ist nicht lokalkompakt.*

Beweis:
Zunächst überzeugt man sich, daß die Vereinigung aller offenen Mengen den ganzen Raum ergibt. Weiter sind offenbar alle Vereinigungen und alle endlichen Durchschnitte von offenen Mengen wieder offen. Da $M_1 = \{x < 0$ oder $x > 0, x << 1\}$ und $M_2 = \{x > 0$ und $x \not<< 1\}$ offen sind, aber $\mathcal{R} = M_1 \cup M_2$, ist $\mathcal{R}$ nicht zusammenhängend. Seien x, y verschieden gegeben. Dann sind $U(x, |x-y|/2)$ und $U(y, |x-y|/2)$ disjunkt und offen und enthalten x bzw. y, und somit sind $\mathcal{R}$, C und $\mathcal{R}^n$ Hausdorff-Räume.

Es gelingt nicht, eine abzählbare Basis auszuwählen; denn die offenen Mengen $M_X = (X - d, X + d)$, $X \in \mathcal{R}, C$ oder $\mathcal{R}^n$ sind überabzählbar und disjunkt. Offenbar sind die von M_X auf $\mathcal{R}$, C oder $\mathcal{R}^n$ induzierten offenen Mengen einfach die einzelnen Punkte. Somit ist die induzierte Topologie die ganze Potenzmenge, und also diskret.

Zum Beweis der nicht vorhandenen Lokalkompaktheit sei $x \in \mathcal{R}$ gegeben, und sei U eine Umgebung von x. Sei ϵ so, daß $U_\epsilon(x) \subset U$. Zu zeigen: der Abschluß U^- ist nicht kompakt. Seien die Mengen M_i definiert wie folgt:

$$M_0 = \{y | y - x >> d \cdot \epsilon\} \cup \{y | y < x\}$$

$$M_i = (x + (i-1) \cdot d \cdot \epsilon, x + (i+1) \cdot d \cdot \epsilon) \text{ für } i = 1, 2, \ldots.$$

Dann überdecken die Mengen M_i ganz F, und insbesondere U^- jeder Umgebung von x. Denn:

Ist $y < x$, so liegt y in M_0.

$y = x$ liegt in M_1

Ist $y > x$, und $y << d \cdot \epsilon$, so liegt y in M_1

Ist $y > x$, und $y >> d \cdot \epsilon$, so liegt y in M_0

Andernfalls liegt y in einem der M_i, $i = 1, 2, ...$

Weiter sind die Mengen offen; die M_i, $i = 1, 2, ...$ sind offene Intervalle. Die Menge $\{y | y - x >> d \cdot \epsilon\}$ ist offen, da zu jedem y auch $U_{d \cdot \epsilon}(y)$ darin liegt. Auch $\{y | y < x\}$ ist klarerweise offen, sodaß M_0 als Vereinigung offener Mengen offen ist.

Aber es gelingt nicht, aus den Mengen M_i endlich viele auszuwählen, die U^- überdecken. Denn jede der unendlich vielen Zahlen $i \cdot d \cdot \epsilon \in U$ befindet sich jeweils nur in der Menge M_i. $\mathcal{QED}$

Anmerkung 37 *Bei der Betrachtung des Beweises fällt auf, daß er analog für die natürliche Topologie auf beliebigen nichtarchimedischen total geordnete Körper geführt werden kann, sodaß ähnlich unschöne Eigenschaften entstehen.*

Neben dem Betrag kann man noch eine weitere Norm einführen, die nicht auf die Ordnungsstruktur zurückgeht, sondern bei der C als Funktionenraum betrachtet wird, und die eine Abbildung nach R darstellt:

Definition 38 (Norm auf C) *Wir führen auf C eine Norm "$|| \; ||_r$", also eine Abbildung von C in die reellen Zahlen ein wie folgt:*

$$||x||_r = \sup_{q \leq r}\{|x[q]|\}$$

Das Supremum ist endlich und sogar ein Maximum, da für jedes r nur endlich viele $x[q]$ ungleich Null sind. Damit ist die Norm vergleichbar mit der Supremumsnorm bei stetigen Funktionen. Sie hat auch ähnliche Eigenschaften:

Hilfssatz 39 (Eigenschaften der Norm) *Die Abbildung "$\|\ \|_r$" von $\mathcal{R}$ nach R genügt für jedes r den Bedingungen*

$$\|0\|_r = 0$$

$$\|x\|_r > 0 \textit{ falls } x \neq 0$$

$$\|x\|_r = \|-x\|_r$$

$$\|x+y\|_r \leq \|x\|_r + \|y\|_r$$

Mittels dieser Norm kann man nun eine zweite Topologie einführen:

Definition 40 (Funktionen-Topologie) *Wir nennen eine Teilmenge M von $\mathcal{R}$, C oder $\mathcal{R}^n$ offen bezüglich der Funktionen-Topologie, falls es zu jedem Element x_0 von M ein $\epsilon > 0$, $\epsilon \in R$, gibt, sodaß alle x mit $\|x - x_0\|_{1/\epsilon} < \epsilon$ in M liegen.*

Es wird sich zeigen, daß die Funktionen-Topologie für allgemeine Konvergenzfragen die geeignetste ist; außerdem ist sie für die Implementierung der Operationen auf $\mathcal{R}$ und C auf elektronischen Rechenmaschinen von großer Bedeutung.

Hilfssatz 41 (Eigenschaften der Funktionen-Topologie) *Mit der Funktionen-Topologie werden $\mathcal{R}$, C und $\mathcal{R}^n$ topologische Räume. Es gibt eine abzählbare Basis. Es sind Hausdorff-Räume. Die durch die Funktionen-Topologie auf R induzierte Topologie ist die natürliche Topologie dort.*

Beweis:
Man überzeugt sich direkt, daß die Vereinigung aller obigen Mengen der ganze Raum ist, und daß jede Vereinigung und jeder endliche Durchschnitt wieder offen sind. Es entsteht ein Hausdorff-Raum; denn seien $x \neq y$ gegeben. Sei $r = \lambda(x-y)$, setze $\epsilon = \min(|(x-y)[r]|/2, 1/2r)$. Dann liegt y nicht in der ϵ-Umgebung von x.

Betrachtet man nun Elemente aus R und beachtet, daß deren einzige mögliche Trägerpunkte Null sind, so zeigt sich, daß die offenen Mengen in

$\mathcal{R}$ den offenen Mengen auf R entsprechen. $\mathcal{QED}$

Neben den bisher diskutierten Topologien bietet sich noch eine an, die berücksichtigt, daß man in den angewandten Disziplinen nie bis auf unendlich kleine Fehler messen kann und auch keine unendlich großen Grössen messen kann. Diese Topologie bilden wir durch geeignetes Fortsetzen der natürlichen Topologie auf R:

Definition 42 (Meßtopologie) *Zu jeder offenen Menge aus R, C oder R^n bilden wir eine Menge aus $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ oder $\mathcal{R}^n$, die sich zusammensetzt aus den Elementen der ursprünglichen Menge vereinigt mit allen Elementen, die unendlich nahe bei den ursprünglichen Elementen liegen. Zu den so erhaltenen Mengen fügen wir noch eine weitere hinzu, die genau alle vom Betrage unendlich großen Zahlen enthält.*

Die Topologie hat also als Basis alle ϵ-Kugeln mit reellem Durchmesser und die Menge aller betragsmäßig unendlich großen Zahlen.

Hilfssatz 43 (Eigenschaften der Meßtopologie) *Mit der obigen Topologie werden $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{R}^n$ zusammenhängende topologische Räume. Es sind keine Hausdorff-Räume. Die durch die Topologie auf R, C bzw. $\mathcal{R}^n$ induzierte Relativtopologie ist die natürliche Topologie dort. Die Topologie ist lokalkompakt.*

Beweis:
Man zeigt direkt, daß die Vereinigung aller Mengen der ganze Raum ist, und daß Vereinigungen und endliche Durchschnitte von obigen Mengen wieder zu den Mengen gehören. Offenbar lassen sich infinitesimal benachbarte Elemente nicht trennen, sie liegen immer gleichzeitig innerhalb oder außerhalb jeder offenen Menge. Der Rest ergibt sich direkt durch Übertragung der Eigenschaften der natürlichen Topologie aus R.

Hilfssatz 44 (Vergleich der Topologien) *Die natürliche Topologie ist eine Verfeinerung der Meßtopologie. Die Funktionentopologie ist nicht Verfeinerung oder Vergröberung der anderen beiden.*

2 Folgen und Reihen

2.1 Konvergenz und Vollständigkeit

In diesem Abschnitt werden wir die Konvergenz bezüglich der im letzen Abschnitt eingeführten Topologien untersuchen. Zunächst führen wir dazu eine Eigenschaft von Folgen ein:

Definition 45 (Verträglichkeit einer Folge) *Eine Folge aus $\mathcal{C}$ heißt verträglich, wenn die Vereinigung der Träger aller Glieder eine fast-endliche Menge ist.*

Diese Eigenschaft ist nicht automatisch garantiert, wie man sich am Beispiel der Folge $a_i = \sum_{j=-i}^{\infty} d^j$ überlegt. Wie der nächste Satz zeigt, überträgt sich die Verträglichkeit von Folgen auf Folgen, die durch Verknüpfungen entstehen:

Hilfssatz 46 (Eigenschaften der Verträglichkeit) *Seien $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ verträgliche Folgen. Dann sind die Summenfolge, die Produktfolge, jede Umordnung einer der Folgen, jede Teilfolge einer der Folgen und die Folge $c_{2i} = a_i$, $c_{2i+1} = b_i$ verträgliche Folgen.*

Beweis:
Seien $A = \cup_{i=1}^{\infty} N_{a_i}$, $B = \cup_{i=1}^{\infty} N_{b_i}$ die Vereinigungen der Träger aller Glieder der beiden Folgen. Nach Voraussetzung ist $A \subset \mathcal{F}$, $B \subset \mathcal{F}$.

Jeder Trägerpunkt der Summenfolge ist Trägerpunkt eines a_i oder eines b_i, und kommt damit in $(A \cup B) \subset \mathcal{F}$ vor. Jeder Trägerpunkt der Produktfolge kommt in $(A + B) \subset \mathcal{F}$ vor.

Die Trägerpunkt jeder Teilfolge von $\{a_i\}$ sind in A enthalten, und die Trägerpunkte der vereinigten Folge in $A \cup B$. $\mathcal{QED}$

Definition 47 (Starke Konvergenz) *Wir sagen, die Folge $\{a_i\}$ konvergiert stark gegen den Grenzwert $a \in \mathcal{R}$, wenn sie bezüglich der natürlichen Topolo-*

gie konvergiert, wenn also zu $\epsilon > 0$ aus $\mathcal{R}$ ein n existiert, so daß $|a_i - a| < \epsilon \; \forall \; i > n$.

Mit Hilfe der starken Konvergenz lassen sich nun die Elemente aus $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ sehr übersichtlich schreiben:

Satz 48 (Darstellung der Elemente von $\mathcal{R}$) *Sei $\{q_i\}, \{x[q_i]\}$ die Wertetabelle von $x \in \mathcal{R}$ (vergleiche 7). Wir setzen*

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} x[q_i] \cdot d^{x_i}$$

Dann konvergiert die Folge x_n stark gegen den Grenzwert x. Wir können also schreiben

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x[q_i] \cdot d^{q_i}$$

Beweis:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle n so, daß $d^n < \epsilon$. Da q_i nach Satz (2) streng divergiert, gibt es ein m so, daß $q_\nu > n \; \forall \; \nu > m$. Somit ist $(x_\nu - x)[q_\nu] = 0$ für alle $\nu > m$, also $|x_\nu - x| < \epsilon$ für alle $\nu > m$, also konvergiert x_n. $\mathcal{QED}$

Es zeigt sich, daß die Folgen und Reihen, die stark konvergieren, durch ein sehr übersichtliches Kriterium erfaßt werden können:

Satz 49 (Konvergenzkriterium für starke Konvergenz) *Sei $\{a_i\}$ eine Folge. Dann konvergiert $\{a_i\}$ stark genau dann, wenn es zu jedem r ein n gibt, sodaß $a_{i_1}[q] = a_{i_2}[q]$ für alle $i_1, i_2 > n$ und für alle $q < r$.*

Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert genau dann stark, wenn die Folge $\{a_i\}$ eine Nullfolge ist.

Beweis:
Der Beweis der ersten Eigenschaft folgt sofort. Das Grenzelement liegt dabei innerhalb $\mathcal{R}$ oder $\mathcal{C}$, da sein Träger unterhalb jeder Grenze mit dem eines Folgengliedes übereinstimmt.

Zum Beweis der zweiten Aussage sei die Reihe konvergent. Das bedeutet nach der ersten Aussage, daß es zu jedem r ein n gibt, sodaß $0 = (\sum_{i=1}^{j+1} a_i - \sum_{i=1}^{j} a_i)[q] = a_j[q]$ für alle $j \geq n$. Dann ist wiederum nach dem ersten Kriterium die Folge Nullfolge. Die Umkehrung ergibt sich analog. $\mathcal{QED}$

Hilfssatz 50 *Jede stark konvergente Folge ist verträglich.*

Beweis:
Sei $r \in Q$ gegeben. Wähle unter Verwendung des Konvergenzkriteriums (49) ein n so, daß alle Folgenglieder größer als n sich für alle Werte kleiner als r nicht mehr ändern. Dann gilt, daß alle Elemente von $\cup N_{a_i}$, die kleiner als r sind, bereits in den ersten n N_{a_i} vorkommen. Deren Vereinigung ist aber in $\mathcal{F}$, und somit gibt es unterhalb von r nur endlich viele Elemente von $\cup N_{a_i}$. $\mathcal{QED}$

Es zeigt sich nun, daß $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ bezüglich der starken Konvergenz vollständig sind:

Satz 51 (Vollständigkeit von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$) *$\{a_n\}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{R}$ oder $\mathcal{C}$, also zu jedem $\epsilon \in \mathcal{R}$ gibt es ein $n \in N$ so, daß $|a_{n_1} - a_{n_2}| \leq \epsilon$ für alle $n_1, n_2 \geq n$, genau dann, wenn $\{a_n\}$ konvergiert, das heißt es gibt ein $a \in \mathcal{R}$, sodaß zu $\epsilon \in \mathcal{R}$ $\exists$ $n \in N$ mit $|a - a_\nu| < \epsilon$ $\forall$ $\nu > n$.*

Beweis:
Sei $\{a_n\}$ eine Cauchy-Folge. Sei $r \in R$ gegeben. Wir wählen zunächst $n(r)$ so, daß $|a_{n_1} - a_{n_2}| < d^{r+1}$ $\forall$ $n_1, n_2 > n$. Setze $a(r) = a_{n+1}(r)$. Dann gilt sogar $a(r) = a_\nu(r)$ $\forall$ $\nu > n$, und $|a - a_\nu| < d^r$. Die so definierte Funktion a ist dann offenbar der Grenzwert der Folge. a ist in $\mathcal{R}$, da a unterhalb jedes

r mit einem Folgenglied übereinstimmt, und somit unterhalb r nur endlich viele Trägerpunkte hat.

Im umgekehrten Falle geht die Argumentation genau wie in R: Sei $\{a_n\}$ konvergent zum Grenzwert a. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle n so, daß $|a_\nu - a| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall\ \nu > n$. Seien nun $n_1, n_2 > n$ gegeben. Dann gilt $|a_{n_1} - a_{n_2}| \leq |a_{n_1} - a| + |a_{n_2} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. $\mathcal{QED}$

Somit hat also die starke Konvergenz sehr schöne Eigenschaften, und ist mittels der Konvergenzkriterien auch recht einfach zu untersuchen. Für praktische Anwendungen reicht sie jedoch nicht aus, und wir benötigen noch eine zweite Art von Konvergenz:

Definition 52 (Schwache Konvergenz) *Wir sagen, die Folge $\{a_i\}$ konvergiert schwach zum Grenzwert $a \in \mathcal{R}$, wenn sie bezüglich der Funktionentopologie konvergiert, wenn also zu $\epsilon > 0$ aus $\mathcal{R}$ ein n existiert, so daß $|(a_i - a)[q]| < \epsilon\ \forall\ i > n, q < 1/\epsilon$.*

Satz 53 (Konvergenzkriterium für schwache Konvergenz) *Sei die Folge $\{a_i\}$ schwach konvergent gegen a. Dann konvergiert die Folge $\{a_i[q]\}$ punktweise gegen $a[q]$, und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder nach oben beschränkten Teilmenge von Q.*

Sei andererseits die Folge $\{a_i\}$ verträglich, und konvergiere die Folge punktweise gegen a. Dann konvergiert die Folge schwach gegen a.

Beweis:
Konvergiere $\{a_i\}$ schwach gegen a. Seien $r \in Q$ und $\epsilon > 0$ aus R gegeben. Wähle $\epsilon_1 = \min(\epsilon, 1/r)$. Dann gilt für alle $q \leq r$, daß $q \leq 1/\epsilon_1$, und somit $|(a_i - a)[q]| < \epsilon$, womit die gleichmäßige Konvergenz gezeigt ist.

Sei andererseits die Folge verträglich. Dann ist der Grenzwert a in $\mathcal{R}$, denn jeder seiner Trägerpunkte ist auch Trägerpunkt eines a_i, liegt damit in $A = \cup N_{a_i} \in \mathcal{F}$. Sei nun $\epsilon > 0$ aus R gegeben. Sei $r = 1/\epsilon$. Zeigen zunächst, daß die Folge a_i auf $\{q \in Q | q \leq r\}$ gleichmäßig konvergiert. Zunächst liegt jeder Punkt, an dem a sich von irgendeinem a_i unterscheiden kann, in A.

Damit gibt es nur endlich viele Punkte q unterhalb von r, die zu untersuchen sind. Suche nun für jedes solche q ein N_q so, daß $|a_i[q] - a[q]| < \epsilon$ für alle $i > N_q$, und sei $N = \max(N_q)$. Dann gilt $|a_i[q] - a[q]| < \epsilon$ für alle $i > N$ und alle q, insbesondere $||a_i - a||_{1/\epsilon} < \epsilon$. $\mathcal{QED}$

Den Zusammenhang zwischen starker und schwacher Konvergenz stellt der nächste Satz her:

Satz 54 *Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz zum gleichen Grenzwert.*

Beweis:
Sei die Folge a_i stark konvergent zum Grenzwert a. Nach Hilfssatz (50) ist die Folge verträglich. Weiter gibt es nach (49) zu jedem $r \in Q$ ein N, so daß sich $a_i[q]$ von $a[q]$ nicht mehr unterscheidet für alle $q < r$. Insbesondere bedeutet dies, daß $a_i[q] \to a[q]$ für alle q. Nach dem Konvergenzkriterium für schwache Konvergenz (53) folgt somit die Konvergenz gegen a. $\mathcal{QED}$

Zum Schluß untersuchen wir reelle Zahlenfolgen:

Satz 55 *Sei $\{a_i\}$ eine rein reelle Folge, die im Reellen gegen den Grenzwert a konvergiert. Dann konvergiert $\{a_i\}$ schwach gegen den gleichen Grenzwert.*

Beweis:
Zum Beweis beachte man nur, daß $|a_i - a|$ als reeller Betrag gleich ist mit $||a_i - a||_r$ für jedes $r \geq 0$. $\mathcal{QED}$

Der Satz gilt nicht für starke Konvergenz: Reelle Folgen konvergieren offenbar nur stark, wenn sie von einem gewissen Glied an konstant sind. Somit stellt die schwache Konvergenz eine Verbindung her zwischen der "natürlichen" Konvergenz auf $\mathcal{R}$, der starken Konvergenz, und der gewöhnlichen Konvergenz auf R. Außerdem ist sie das geeignete Instrument zur Untersuchung von Potenzreihen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

Zum Abschluß des Abschnittes über die Konvergenz von Folgen zeigen wir, daß der Körper $\mathcal{R}$, der ja zunächst etwas willkürlich gewählt aussah, tatsächlich der kleinste mit seinen charakteristischen Eigenschaften ist.

Satz 56 (Einzigartigkeit von $\mathcal{R}$) *Der Körper $\mathcal{R}$ ist die kleinste nichtarchimedische, bezüglich der natürlichen Topologie vollständige Körperfortsetzung der reellen Zahlen, in der alle positiven Wurzeln positiver Zahlen eindeutig existieren, und in der a^n für jedes unendlich kleine a Nullfolge ist.*

Beweis:
Offenbar erfüllt $\mathcal{R}$ die oben genannten Eigenschaften. Zeigen nun, daß $\mathcal{R}$ in jede andere Körperfortsetzung von R mit den oben genannten Eigenschaften eingebettet werden kann. Sei also $\mathcal{F}$ ein solcher Körper. Sei δ ein unendlich kleines, positives Element in $\mathcal{F}$. Sei $\delta^{1/n}$ die nach Voraussetzung existierende n-te Wurzel von δ. Offenbar gilt für jedes $p \in N$ $(\delta^{1/n})^m = (\delta^{1/n \cdot p})^{m \cdot p}$. Sei also $q = \frac{m}{n} \in Q$, setze $(\delta)^q = (\delta^{1/n})^m$. Dies ist eindeutig. Sei $q_1 < q_2$, dann ist offenbar $\delta^{q_1} > \delta^{q_2}$. Sei nun $a \in R$, dann ist auch $a \in \mathcal{F}$, also auch $a \cdot \delta^q \in \mathcal{F}$.

Sei nun $(\{q_i\}, \{x[q_i]\})$ die Wertetabelle eines Elementes aus $\mathcal{R}$ gegeben. Betrachten die Folge

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x[q_i]\delta^{q_i}.$$

Diese Folge konvergiert in $\mathcal{F}$; denn sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da nach Voraussetzung δ^n konvergiert, gibt es ein n so, daß $|\delta^\nu| < \epsilon \; \forall \; \nu > n$. Da die Folge q_i streng divergiert, gibt es ein m, sodaß $q_\mu > n \; \forall \; \mu > m$. Dann gilt aber für beliebige $\mu_1 > \mu_2 > m$:

$$|s_{\mu_2} - s_{\mu_1}| = |\sum_{i=\mu_2+1}^{\mu_1} x[q_i]\delta^{q_i}| < |x[q_{\mu_2+1}]| \cdot \delta^n < \epsilon,$$

womit wegen der Vollsändigkeit gezeigt ist, daß die Folge konvergiert. Ordnen nun jedem Element $\sum_{i=1}^{\infty} x[q_i] \cdot d^{q_i}$ aus $\mathcal{R}$ das Element $\sum_{i=1}^{\infty} x[q_i] \cdot \delta^{q_i}$ aus $\mathcal{F}$ zu. Dies ist injektiv. Weiter überzeugt man sich, daß die Abbildung mit den algebraischen Operationen und der Ordnungsstruktur verträglich ist. $\mathcal{QED}$

Wir bemerken, daß man einen Körper mit den Eigenschaften von $\mathcal{R}$ auch durch sukzessive Erweiterung eines einfacheren nichtarchimedischen Körpers, zum Beispiel des bekannten Körpers der rationalen Funktionen, konstruieren könnte. Dazu müßte man den Körper zunächst vervollständigen. Im nächsten Schritt müßte er algebraisch abgeschlossen werden, was nach dem Verfahren von Kronecker-Steinitz erfolgen kann. Dieses Verfahren ist allerdings nichtkonstruktiv, während der hier gewählte, direkte Weg vollständig konstruktiv ist.

Anmerkung 57 *Beim Beweis der Einzigartigkeit fiel auf, daß von δ lediglich gefordert wurde, daß es unendlich klein und positiv ist; darüberhinaus ist seine Größe beliebig. Offenbar läßt sich somit unter allen unendlich kleinen Elementen durch Isomorphie keines besonders auszeichnen. Insbesondere ist auch $\mathcal{R}$ selbstisomorph durch die Zuordnung $x \to x'$, wobei $x'[q] = x[a \cdot q]$ mit $a \in Q$, $a > 0$.*

2.2 Potenzreihen

In diesem Abschnitt wenden wir uns einer besonders wichtigen Klasse von Folgen zu, den Potenzreihen. Insbesondere in der Anwendung sind derartige transzendente Funktionen von großer Bedeutung, und es ist eine der Stärken des Körpers $\mathcal{R}$, daß ihre Einführung ziemlich problemlos gelingt. Über ihre eigenständige Bedeutung hinaus sind die Potenzreihen für die weitere Entwicklung der Analysis auf $\mathcal{R}$ von zentralem Interesse. Sie haben eine Schlüsselfunktion bei dem Problem der Fortsetzung allgemeiner reeller Funktionen.

Wir beginnen unsere Diskussion der Potenzreihen mit einem Hilfssatz :

Hilfssatz 58 *Sei $M \in \mathcal{F}$, also eine fast-endliche Menge. Zu M sei*

$$M_\Sigma = \{x| \ \exists\ n \in N, x_1, ..., x_n \in M \ \mathit{mit}\ x = x_1 + ... + x_n\}$$

Dann ist M_Σ fast-endlich genau dann, wenn $\min(M) \geq 0$.

Beweis:
Sei zunächst $\min(M) = g < 0$. Offenbar sind alle Vielfachen von g in M_Σ.

M_Σ enthält somit unendlich viele Elemente kleiner als Null und ist damit nicht fast-endlich.

Sei andererseits $\min(M) \geq 0$. Ist $\min(M) = 0$, so betrachten wir zunächst $\bar{M} = M \setminus \{0\}$. Dann ist $\min(\bar{M}) > 0$. Da sich aber M und $\bar{M}$ lediglich um die Null unterscheiden, diese eine Summe aber nicht verändert, gilt offenbar $\bar{M}_\Sigma = M_\Sigma$. Es genügt also, Mengen mit positivem Minimum g zu betrachten. Sei nun $r \in R$ gegeben. Zu zeigen ist, daß es nur endlich viele Elemente in M_Σ gibt, die kleiner als r sind. Da alle Elemente in M_Σ größergleich dem Minimum g sind, gilt die Behauptung für $r < g$. Sei nun $r > g$. Sei $n = [\frac{r}{g}]$ die größte natürliche Zahl kleiner als $\frac{r}{g}$. Sei $x < r$ in M_Σ. Dann können zu x nur höchstens n Summanden beitragen, da jede Summe mit mehr als n Termen r und damit x übersteigt. Weiterhin können in der Summe nur endlich viele verschiedene Elemente von M vorkommen, nämlich all die, die kleiner als r sind. Damit gibt es aber nur endlich viele Möglichkeiten, Summen zusammenzustellen, und somit nur endlich viele Summationsergebnisse kleiner als r. $\mathcal{QED}$

Korollar 59 *Eine Folge $x_i = x^i$ ist verträglich genau dann, wenn x höchstens endlich ist.*

Eine Folge $x_i = a_i \cdot x^i$ ist verträglich, wenn x höchstens endlich ist und a_i verträglich ist.

Beweis:
Zum Beweis bemerken wir, daß die Menge $\cup_{i=1}^{\infty} N_{x^i}$ identisch ist mit der Menge M_Σ aus dem letzten Hilfssatz, wenn $M = N_x$ gesetzt wird. Diese Menge hat Minimum größergleich Null genau dann, wenn x höchstens endlich ist.

Zum Beweis des zweiten Teiles verweisen wir auf Hilfssatz (46), der aussagt, daß Produkte verträglicher Folgen wieder verträglich sind. $\mathcal{QED}$

Satz 60 (Potenzreihen mit rein komplexen Koeffizienten) *Habe die komplexe Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in C$, den Konvergenzradius η. Sei nun*

$z \in C$, und sei $a_n(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z^i \in C$. Gilt dann $|z| < \eta$, so konvergiert $a_n(z)$ schwach.

Den Grenzwert bezeichnen wir als die Fortsetzung der Potenzreihe auf C.

Beweis:
Zunächst bemerken wir, daß die daß die Folge $a_n(z)$ für beliebiges höchstens endliches z verträglich ist. Dies folgt aus Korollar (59) unter Beachtung der Tatsache, daß die Folge a_i, deren Terme rein komplex sind, verträglich ist.

Es bleibt zu zeigen, daß die Folge $a_n(z)$ punktweise konvergiert, wenn $|z| < \eta$. Zerlegen z in seinen "Komplexteil" X und den unendlich kleinen Rest x. Ist $x = 0$, so ist alles gezeigt, da dann die Reihe rein komplex ist. Andernfalls sei $g = \lambda(x)$. Dann gilt $g > 0$. Sei $r \in Q$ gegeben. Sei $m = [\frac{r}{g}]$. Dann gilt für den Wert von $(X + x)^n$ an der Stelle r:

$$\begin{aligned}((X + x)^n)[r] &= (\sum_{i=1}^{n} x^i \cdot \frac{n!}{(n-i)!i!} \cdot X^{(n-i)})[r] \\ &= (\sum_{i=1}^{min(m,n)} x^i \cdot \frac{n!}{(n-i)!i!} \cdot X^{(n-i)})[r]\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, daß x^i an r verschwindet, falls $i > m$. Dann gilt aber für jede Teilsumme der Potenzreihe a_ν die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}|\sum_{n=1}^{\nu} a_n (X + x)^n|[r] &= |\sum_{n=1}^{\nu} a_n \sum_{i=1}^{min(m,n)} x^i[r] \cdot \frac{n!}{(n-i)!i!} \cdot X^{(n-i)}| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{(|x|^i)[r]}{i! \cdot |X|^i}\right) \sum_{n=1}^{\nu} |a_n| \cdot n^m \cdot |X|^n\end{aligned}$$

Hierbei enthält die rechte Summe lediglich reelle Terme. Da $|X|$ innerhalb des Konvergenzradius liegt, konvergiert die Reihe (auch mit dem

Beifaktor n^m, da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^m} \to 1$). Da der linke Term nicht von ν abhängt, ist die punktweise Konvergenz am Ort r gezeigt. $\mathcal{QED}$

In der Cauchy-Theorie der analytischen Funktionen ist ein markantes Ergebnis, daß vermöge der Cauchyschen Formel eine analytische Funktion eindeutig durch ihre Werte auf einem geeigneten geschlossenen Weg bestimmt waren. Innerhalb unserer Theorie reicht sogar die Kenntnis der Funktion an einem einzigen geeignet gewählten Punkt aus, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 61 (Punktformel à la Cauchy) *Sei $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(z-z_0)^i$ die Fortsetzung einer komplexen Potenzreihe auf C. Dann ist die Funktion eindeutig bestimmt durch ihren Wert an der Stelle z_0+h, wobei h eine beliebige nichtverschwindende unendlich kleine Zahl ist.*

Beweis:
Aus der Potenzreihe liest man ab, daß

$$f(z_0+h) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i h^i$$

Sei $h \approx h_0 d^r$, $h_0 \in R, r \in Q$, dann folgt

$$a_0 = (f(z_0+h)) = [0]$$

$$a_1 = (f(z_0+h))[r]/h_0,$$

$$a_2 = (f(z_0+h) - a_1 h)[2r]/h_0^2,$$

$$a_3 = (f(z_0+h) - a_1 h - a_2 h^2)[3r]/h_0^3,$$

$$\dots$$

Wählt man speziell $h = d$, so erhält man die besonders übersichtliche Form $a_i = (f(z_0+d))[i]$. $\mathcal{QED}$

Es zeigt sich, daß man im Rahmen der Potenzreihen auf C die sogenannten formalen Potenzreihen auf einfache Weise mitbehandeln kann. Bei den formalen Potenzreihen definiert man bekannterweise eine gliedweise Multiplikation von Potenzreihen in der üblichen Art und Weise, läßt aber alle Fragen der Konvergenz außer Acht.

Wie der nächste Satz zeigt, konvergiert in C jede Potenzreihe mit rein komplexen Koeffizienten für unendlich kleine Argumente, unabhängig vom Konvergenzradius. Weiter kann die Multiplikation wirklich gliedweise ausgeführt werden. Somit können formale Potenzreihen auf ganz natürliche Weise in die Theorie der Potenzreihen aufgenommen werden.

Satz 62 (Formale Potenzreihen) *Jede Potenzreihe mit rein komplexen Koeffizienten konvergiert auf jeder unendlich kleinen Kugel stark gegen eine Grenzfunktion, auch wenn ihr reeller Konvergenzradius Null ist. Weiter gilt auf jeder unendlich kleinen Kugel unabhängig vom Konvergenzradius, daß*

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n) = (\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n),$$

wobei $c_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-1)!} a_i \cdot b_{n-i}$

Beweis:
Der Beweis ergibt sich direkt aus der Tatsache, daß es zu jedem $r \in Q$ ein m gibt, sodaß $x^i(r) = 0$, für alle $i > m$, falls x vom Betrage unendlich klein ist. Somit müssen für jedes r nur endlich viele Terme behandelt werden. $\mathcal{QED}$

Die Tatsache, daß beliebige Potenzreihen mit rein komplexen Koeffizienten für unendlich kleine Argumente konvergieren, ist von zentraler Bedeutung für die Frage der Fortsetzung von Funktionen, die weiter unten behandelt wird.

Bisher haben wir lediglich Potenzreihen mit rein komplexen Koeffizienten betrachtet. Diese ermöglichen die Übertragung aller in den Anwendungen wichtigen transzendenten Funktionen, insbesondere der Winkelfunktionen und der Exponentialfunktion. Zum Abschluß des Abschnittes diskutieren wir das Konvergenzverhalten allgemeiner Potenzreihen, bei denen die Koeffizienten aus C stammen dürfen.

Satz 63 (Konvergenzkriterium für allgemeine Potenzreihen) *Sei* $a_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} \cdot d^{r_{i,j}}$ *eine Folge in* C. *Sei*

$$r = -\liminf(\frac{r_{i,0}}{i})$$

Sei x *aus* C *mit* $x \approx x_0 \cdot d^{r_x}$. *Dann konvergiert die Potenzreihe* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ *stark, wenn* $r_x > r$ *und divergiert für* $r_x < r$.

Ist $r = r_x$, *so gilt:*

Wird r *von unendlich vielen* $-r_{i,0}/i$ *unterschritten, so divergiert die Reihe.*

Wird r *von nur höchstens endlich vielen* $-r_{i,0}/i$ *unterschritten und sind nur höchstens endlich viele davon gleich* r, *so konvergiert die Reihe.*

Wird r *von nur höchstens endlich vielen* $-r_{i,0}/i$ *unterschritten und sind unendlich viele davon gleich* r, *so divergiert die Reihe, falls* a_i *nicht verträglich ist; ist* a_i *verträglich, so sei* $s = 1/\limsup_{i:\ ri,0/i=r}(a_{i,0})$ *(Konvention* $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$*). Dann konvergiert die Reihe, falls* $|x_{i,0}| < s$, *und divergiert, falls* $|x_{i,0}| < s$.

Beweis:
Sei x so, daß $r_x > r$. Sei $s = \frac{r_x+r}{2}$. Dann gibt es n so, daß $r_i/i > -s\ \forall\ i > n$. Dann ist $\lambda(a_i x^i) \geq -is + iq = i(q-s) > 0$. Da $(q-s) > 0$, überschreitet der kleinste Trägerpunkt also jede rechte Grenze, sodaß die Folge stark konvergiert.

Sei x so, daß $r_x < q$. Sei $s = \frac{r_x+r}{2}$. Dann gibt es eine Teilfolge a_{i_ν} mit $r_{i_\nu}/i < -s$, und der Term a_{i_ν} hat kleinsten Trägerpunkt $< -is+iq < i(q-s)$. Da $(q-s) < 0$, gibt es zu jeder oberen Grenze einen Beitragsterm, dessen kleinster Trägerpunkt die Grenze unterschreitet. Somit ist der Träger der Grenzfunktion, falls diese existiert, nach links unbeschränkt und somit nicht in $\mathcal{F}$.

(Rest des Beweises fehlt)

3 Differentialrechnung auf $\mathcal{R}$

3.1 Glattheitseigenschaften

In diesem Abschnitt werden die Konzepte von Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ eingeführt. Dies geschieht analog wie in R mittels ϵ und δ. Ein Unterschied ergibt sich dadurch, daß hier im Gegensatz zur Situation in R ϵ und δ ganz verschiedene Größenordnungen haben können. Für die Praxis, und insbesondere für alle aus R zu übernehmenden Funktionen, zeigt es sich, daß es wünschenswert ist, manchmal zusätzlich zu fordern, daß $\epsilon \sim \delta$.

Definition 64 (Stetigkeit und gleichartige Stetigkeit) *Die Funktion $f : D \subset \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ heißt stetig am Punkt $x_0 \in D$, falls es zu jedem $\epsilon \in \mathcal{R}$ ein $\delta \in \mathcal{R}$ gibt, sodaß*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \textit{ für alle } x \in D \textit{ mit } |x - x_0| < \delta$$

Die Funktion heißt gleichartig stetig am Punkt x_0, falls δ stets so gewählt werden kann, daß $\delta \sim \epsilon$.

Analog definieren wir die Stetigkeit auf $\mathcal{C}$ oder $\mathcal{R}^n$ mit den entsprechenden Beträgen.

Wir bemerken, daß es zur gleichartigen Stetigkeit in R kein Analogon gibt, da in R stets $\epsilon \sim \delta$.

Satz 65 (Regeln für Stetigkeit) *Seien f, g (gleichartig) stetig am Punkt $x \in \mathcal{R}$ (und dort ~ 1). Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ (gleichartig) stetig am Punkt x. Sei h (gleichartig) stetig am Punkt $f(x)$, so ist $h \circ f$ (gleichartig) stetig am Punkt x.*

Beweis:
Die Beweise erfolgen analog wie im Falle von R. $\mathcal{QED}$

Definition 66 (Differenzierbarkeit und gleichartige Differenzierbarkeit) *Die Funktion $f : D \subset \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ heißt differenzierbar am Punkt $x_0 \in D$, falls es ein g gibt, sodaß es zu jedem $\epsilon \in \mathcal{R}$ ein $\delta \in \mathcal{R}$ gibt mit*

$$|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g| < \epsilon \text{ für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

In diesem Falle nennen wir g die Ableitung am Punkte x_0. Die Funktion heißt gleichartig differenzierbar am Punkt x_0, falls δ stets so gewählt werden kann, daß $\delta \sim \epsilon$.

Analog definieren wir die Differenzierbarkeit auf $\mathcal{C}$ mit dem entsprechenden Betrag.

Satz 67 (Regeln für Differenzierbarkeit) *Seien f, g (gleichartig) differenzierbar am Punkt $x \in \mathcal{R}$ (und dort ~ 1). Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ (gleichartig) differenzierbar am Punkt x, und die Ableitung ist gegeben durch $f'(x) + g'(x)$ bzw. $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Ist $f(x) \neq 0$, ($f(x) \sim 1$), so ist $1/f$ (gleichartig) differenzierbar am Punkt x mit Ableitung $-f'(x)/f^2(x)$. Sei h differenzierbar am Punkt $f(x)$, so ist $h \circ f$ differenzierbar am Punkt x, und die Ableitung ist gegeben durch $h'(f(x)) \cdot f'(x)$.*

Beweis:
Die Beweise erfolgen analog wie im Falle von R, wobei man im Falle der gleichartigen Differenzierbarkeit noch erhält, daß $\epsilon \sim \delta$. $\mathcal{QED}$

Analog wie in $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ gilt:

Satz 68 *Ist f am Punkte x_0 (gleichartig) differenzierbar, so ist f am Punkte x_0 (gleichartig) stetig.*

Der Beweis ist offenbar.

Insbesondere erhalten wir aus den vorherigen Sätzen:

Korollar 69 (Differenzierbarkeit von rationalen Funktionen) *Jede rationale Funktion ist differenzierbar, falls der Nenner nicht verschwindet.*

Sind alle Koeffizienten rein komplex, so ist die Funktion gleichartig differenzierbar.

Die rein mittels endlich vieler arithmetischer Operationen erzeugbaren rationalen Funktionen verhalten sich also bezüglich Glattheit wie in C. Eines der wichtigsten Konzepte der konventionellen Analysis ist das der Potenzreihen. Wie der nächste Satz zeigt, haben auch die Potenzreihen analoge Glattheitseigenschaften wie in der konventionellen Analysis, sie sind nämlich beliebig oft differenzierbar, und dies sogar gleichartig.

Satz 70 (Gleichartige Differenzierbarkeit von Potenzreihen) *Sei $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(z-z_0)^i$ eine Potenzreihe mit rein komplexen Koeffizienten auf C, und sei der reelle Konvergenzradius $\eta > 0$. Dann hat für jedes $k \geq 1$ die Reihe*

$$g_k(z) = \sum_{i=k}^{\infty} i \cdot (i-1) \cdot \ldots \cdot (i-k+1) a_i (z-z_0)^{i-k}$$

Konvergenzradius η. Weiterhin ist die Funktion f unendlich oft gleichartig differenzierbar auf $B(z_0, \eta)$, und es gilt $f^{(k)} = g_k$ auf $B(z_0, \eta)$. Ist $z \in C$, dann stimmt die Ableitung der fortgesetzten Potenzreihe mit der der ursprünglichen überein.

Für $i \geq 0$ gilt $a_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(z_0)$.

Beweis:
Der erste Teil ergibt sich unmittelbar unter Ausnutzung von $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to 1$ und Induktion über k.

Zum Beweis des zweiten Teiles sei $z \in B(z_0, \eta)$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Sei zunächst $\epsilon \sim 1$, also nicht unendlich klein. Sei $\epsilon_c > 0$ der Komplexteil von ϵ, und sei z_c der Komplexteil von z, also $\epsilon_c =_0 \epsilon, z_0 =_0 z$. Wähle dann δ so, daß für die rein komplexe Potenzreihe gilt

$$\left|\frac{f(z_c + h_c) - f(z_c)}{h_c} - g_1(z_c)\right| < \frac{\epsilon_c}{2} \;\forall\; |h_c| < 2\delta \quad \text{(i)}$$

Wie aus dem Beweis zu Satz (60) folgt, gilt $f(z_c) =_0 f(z)$, $f(z_c + h_c) =_0 f(z+h)$ und somit

$$\left|\frac{f(z_c + h_c) - f(z_c)}{h_c} - g_1(z_c)\right| =_0 \left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g_1(z)\right|$$

und somit sogar

$$|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g_1(z)| < \epsilon_c \;\forall\; |h| < \delta$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß in (i) die Differenz zwischen dem Betrag und ϵ nicht unendlich klein ist, und daß $B(z,\delta) \subset B(z_c, 2\delta)$.

Sei nun ϵ unendlich klein. Schreibe $\epsilon = \epsilon_0 d^r, r \in Q, \epsilon_0 \sim 1$. Setze $h = h_0 d^r$. Dann gilt für alle $s \leq 2r$:

$$f(z+h)(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i((z+h-z_0)^i)[s]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{\nu=1}^{i} ((z-z_0)^{i-\nu}\frac{i!}{\nu!(i-\nu)!}h^\nu)[s]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i((z-z_0)^i)[s] + \sum_{i=1}^{\infty} h \cdot i \cdot a_i((z-z_0)^{i-1})[s] + \sum_{i=2}^{\infty} h^2 . \frac{i\cdot(i-1)}{2} a_i((z-z_0)^{i-2})[s]$$

Höhere Potenzen von h verschwinden an s. Damit ist

$$|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g_1(z)| =_r h_0 \cdot d^r \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i\cdot(i-1)}{2} a_i (z-z_0)^{i-2}$$

was durch Wahl von h_0 kleiner als ϵ gemacht werden kann. $\mathcal{QED}$

Zum Schluß dieses Abschnittes beweisen wir einen Satz, der für die Berechnung von Ableitungen von großer Bedeutung ist und die Differentiation in gewisser Weise zu einer arithmetischen Operation macht.

Satz 71 *Sei f am Punkte x gleichartig differenzierbar. Dann gilt*

$f'(x) =_r \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *für alle $h \neq 0, h << d^r$.*

Beweis:
indirekt: Wir nehmen an, es gibt ein $h << d^r$ mit $f'(x) \neq_r \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Setze $\epsilon = |f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}|$. Dann gilt $\min(N_\epsilon) \leq r$. Da aber f gleichartig differenzierbar ist, gibt es ein $\delta \sim \epsilon$, $\delta > 0$, mit $|f'(x) - \frac{f(x+h^*)-f(x)}{h*}| < \epsilon$

für alle h^* mit $|h^*| < \delta$. Wegen $\delta \sim \epsilon$ gilt aber $\min(N_\delta) = \min(N_\epsilon) \le r$, also $|h| < \delta$, was im Widerspruch steht zur Wahl von h. $\mathcal{QED}$

Dieser zentrale Satz ermöglicht die Berechnung von Ableitungen von Funktionen auf R durch einfache Arithmetik auf $\mathcal{R}$. Er liefert den mathematischen Hintergrund zu dem Beispiel (31).

3.2 Fortsetzung reeller Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir uns beschäftigen mit der Frage, ob und unter welchen Bedingungen beliebige reelle Funktionen sinnvoll auf $\mathcal{R}$ fortgesetzt werden können. Für zwei wichtige Klasse von Funktionen, den rationalen Funktionen und den Potenzreihen, haben wir das bereits in Korollar (69) und Satz (70) gezeigt. Bei den Potenzreihen ergab sich alles auf recht natürliche Weise, da sich sowohl die algebraische Operation des Potenzierens als auch die Bildung des Grenzwertes direkt auf die erweiterten Körper übertragen.

Für allgemeinere Funktionen, die sich nicht mehr durch rein algebraische Prozesse erzeugen lassen, ergibt sich nun die Frage, ob es möglich ist, diese unter Beibehaltung der Glattheitseigenschaften fortzusetzen. Dieses gelingt ganz allgemein, wie wir im Folgenden sehen werden.

Definition 72 (Die gewöhnliche Fortsetzung) *Sei f auf $(a,b) \subset R$ gegeben und dort n-mal stetig differenzierbar, wobei $n = 0, 1, \ldots$ und auch $n = \infty$ gewählt werden darf. Wir bilden eine fortgesetzte Funktion $\bar{f}$ auf $(a,b) \subset \mathcal{R}$ wie folgt. Sei $\bar{x} \in (a,b) \subset \mathcal{R}$ gegeben. Schreiben $\bar{x} = X + x$, wobei $X \in R$ und $x << 1$ oder $x = 0$. Dies ist auf eindeutige Weise möglich. Bilden nun $\bar{f}(\bar{x})$ wie folgt:*

$$\bar{f}(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(X) \cdot \frac{x^i}{i!}$$

Die Gesamtheit aller gewöhnlichen Fortsetzungen reeller Funktionen nennen wir gewöhnliche Funktionen.

Wir bemerken, daß im Falle $n = \infty$ die Summe nach Satz (62) stark konvergiert, da alle $f^{(i)}$ höchstens endlich sind, x aber unendlich klein.

Offenbar stimmt $\bar{f}$ mit f auf allen rein reellen Punkten überein; in jeder unendlich kleinen Umgebung jedes reellen Punktes ist die Funktion dann durch eine Potenzreihe gegeben. Analog kann man auch auf einem Gebiet in C gegebenen Funktionen übertragen.

Es zeigt sich nun, daß die gewöhnliche Fortsetzung die gleichen Glattheitseigenschaften hat wie die Funktion f:

Satz 73 *Sei f auf $(a,b) \subset R$ gegeben und dort n-mal stetig differenzierbar, wobei $n = 0, 1, \ldots$ und auch $n = \infty$ gewählt werden darf. Dann ist die fortgesetzte Funktion $\bar{f}$ auf $(a,b) \subset \mathcal{R}$ auf (a,b) n-mal gleichartig stetig differenzierbar, und an den reellen Punkten aus (a,b) stimmen die Ableitungen von f und $\bar{f}$ überein.*

Beweis:
Zum Beweis betrachtet man die beiden Fälle $\epsilon \not<< 1$, wobei es dann auf die Differenzierbarkeit der ursprünglichen Funktion ankommt, und $\epsilon << 1$, wobei es lediglich auf die Differenzierbarkeit von Potenzreihen ankommt. $\mathcal{QED}$

Wie bereits erwähnt, sind algebraisch definierte Funktionen wie die Polynome und die Potenzreihen ja auch direkt fortsetzbar. In diesem Fall stimmen die algebraische Fortsetzung und die gewöhnliche Fortsetzung überein.

Natürlich ist die Klasse der so durch Fortsetzung aus reellen Funktionen entstandenen Funktionen sehr klein im Vergleich zur Gesamtheit der Funktionen auf $\mathcal{R}$. Das Konzept der gewöhnlichen Funktionen wollen wir nun noch etwas erweitern. Mit dieser Erweiterung gelingt es dann, die wichtigste Klasse der nicht-gewöhnlichen Funktionen, der Deltafunktionen, zu behandeln.

Definition 74 (skalierte gewöhnliche Funktionen) *Sei f eine Funktion auf $\mathcal{R}$ oder C. Dann sagen wir, f ist eine skalierte gewöhnliche Funktion, wenn es lineare Transformationen $l_1(x) = a_1 + b_1 \cdot x$ und $l_2(x) = a_2 + b_2 \cdot x$ mit Koeffizienten aus $\mathcal{R}$ oder C gibt, sodaß*

$$f = l_1 \circ f_s \circ l_2$$

und f_s gewöhnlich ist

Derartige skalierte gewöhnliche Funktion sind zum Beispiel die weiter hinten zu behandelnden Deltafunktionen.

Es wird sich zeigen, daß die so eingeführten skalierten gewöhnlichen Funktionen ganz ähnliche Eigenschaften haben wie die gewöhnlichen Funktionen. Insbesondere können damit Deltafunktionen wie normale Funktionen behandelt werden.

3.3 Zwischenwerte und Extrema

In diesem Abschnitt behandeln wir die ersten wichtigen Konzepte der Analysis, nämlich das der Zwischenwerte und Extrema von Funktionen. In der reellen Analysis reichte für die Existenz von Zwischenwerten und von Maxima die Stetigkeit der Funktion aus. Dies ist hier nicht so, wie die nächsten Beispiele zeigen. Allerdings gelingt es, die Aussagen unter etwas verschärften, für die Praxis aber meist unerheblichen Bediungungen zu zeigen.

Beispiel 75 (Stetige Funktionen und Zwischenwerte) *Wir betrachten die folgenden beiden Funktionen auf dem Intervall* $[-1,+1]$*:*

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & \textit{falls } x \textit{ negativ oder positiv und unendlich klein} \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(x) = X \in R \textit{ mit } X \approx x$$

f_2, die sogenannte "Mikro-Gaußklammer", bestimmt also den (eindeutigen) Realteil des Wertes x.

Sowohl f_1 als auch f_2 sind stetig; zu beliebigem ϵ wähle man einfach $\delta = d$ und beachtet, daß beide Funktionen zu beliebigem $x \in [-1,+1] \subset \mathcal{R}$ auf der d-Umgebung von x konstant sind.

Die Funktion f_2 ist sogar gleichartig stetig; man wähle $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ und erhält stets $f_2(U(x,\delta)) \subset U(f_2(x),\epsilon)$, wie man sofort nachprüft.

Aber die Funktion f_1 nimmt den Wert 0, der sicherlich zwischen $f_1(-1)$ und $f_1(+1)$ liegt, nicht an. Die Funktion f_2 ist rein reellwertig und nimmt somit zum Beispiel d, das zwischen $f_2(-1)$ und $f_2(+1)$ liegt, nicht an. Allerdings kommt f_2, das ja gleichartig stetig ist, zumindest jedem Zwischenwert unendlich nahe.

Wie der nächste Satz zeigt, kann man erreichen, daß Zwischenwerte angenommen werden, wenn man von der Funktion zusätzlich fordert, daß sie gleichartig differenzierbar ist und die Ableitung nirgends verschwindet.

Satz 76 (Zwischenwertsatz) *Sei f auf dem reellen Intervall $[a,b]$ gleichartig differenzierbar. Für die Funktion und die Ableitung gelte $f(x) \sim 1$, $f'(x) \sim 1$ auf $[a,b]$. Dann nimmt f jeden Zwischenwert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis:
Sei S zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Schreiben $S = S_R + s$, $S_R \in R$, $|s| << 1$ oder Null. Wir betrachten zunächst die auf auf R eingeschränkte Funktion f_R, die man durch Realteilbildung erhält. Dann ist f_R als reelle Funktion stetig, und nimmt somit S_R als reellen Zwischenwert an. Sei X der reelle Zwischenwert, dann gilt wegen der gleichartigen Stetigkeit für die Funktion f:

$$f(X) =_0 S$$

Dann gilt wegen der Differenzierbarkeit von f für unendlich kleine x:

$$f(X + x) = f(X) + f'(X) \cdot x + r(x) \cdot x^2,$$

wobei die Funktion $r(x)$ höchstens endlich ist, und nach Voraussetzung $f'(X) \sim 1$. Kombinieren der beiden letzten Gleichungen ergibt

$$f'(X) \cdot x + r(x) \cdot x^2 = s$$

Gelingt es nun, ein unendlich kleines x zu finden, das dieser Gleichung genügt, dann ist $X + x$ der gesuchte Zwischenwert. Schreiben die Beziehung als Fixpunktgleichung:

$$x = \frac{s}{f'(X)} - \frac{r(x)}{f'(X)} \cdot x^2$$

wobei $r(x)/f'(X)$ für jedes unendlich kleine x höchstens endlich ist. Sei $\frac{k=\lambda(s}{f'(X)}$. Dann ist offenbar $k > 0$. Sei nun M die Menge aller Elemente, deren kleinster Trägerpunkt k nicht unterschreitet. Dann gilt offenbar $f(M) \subset M$, und M genügt den Voraussetzungen des Fixpunktsatzes (10).

Seien nun weiter $x_1, x_2 \in M$ gegeben, und sei $x_1[p] = x_2[p] \; \forall \; p < q$. Weil der kleinste Trägerpunkt von x_1 und x_2 größergleich k ist, gilt dann offenbar $x_1^2[p] = x_2^2[p] \; \forall \; p < q + k$. Weil $r(x)$ auf M stets höchstens endlich ist, folgt somit auch $(\frac{s}{f'(X)} + x_1^2 \cdot r(x_1))[p] = (\frac{s}{f'(X)} + x_2^2 \cdot r(x_2))[p] \; \forall \; p < q+k$. Somit sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes (10) gegeben, also hat die Funktion f einen Fixpunkt, die gesuchte Lösung. $\mathcal{QED}$

Anmerkung 77 *Offenbar kann die Forderung des Nichtverschwindens der Ableitung eingeschränkt werden insofern, als sie nur am reellen Zwischenwert der eingeschränkten Funktion benötigt wird. Für die in der Praxis wichtigste Anwendung des Zwischenwertsatzes, die Konstruktion von Inversen, ist dies dann keine zusätzliche Einschränkung; denn meist benötigt man die Inversen in einer ganzen Umgebung, deren Existenz man mit gut mittels nichtverschwindender Ableitungen und dem Mittelwertsatz (s.u.) zeigen kann.*

Als Korollar erhält man einen Zwischenwertsatz für skalierte gewöhnliche Funktionen; hier treten dann insbesondere die Endlichkeitsbedingungen nicht mehr auf.

Korollar 78 (Zwischenwertsatz für skalierte gewöhliche Funktionen) *Sei f eine skalierte gewöhnliche Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Sei f dort stetig und im Innern des Intervalles mindestens einmal gleichartig differenzierbar mit nichtverschwindender Ableitung. Dann nimmt f jeden Zwischenwert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis:
Offenbar genügt es, den Beweis für gewöhnliche Funktionen zu führen. Für skalierte gewöhnliche Funktionen ergibt er sich dann unmittelbar durch Betrachten der zugrundeliegenden gewöhnlichen Funktion und Skalieren des Wertes ξ, an dem der Zwischenwert angenommen wird.

Für die gewöhnlichen Funktionen erhält man aber sofort, dass die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes erfüllt sind. $\mathcal{QED}$

Anmerkung 79 *Wir bemerken, daß die Existenz von Wurzeln ähnlich wie in der reellen Analysis nun auch mit Hilfe des Zwischenwertsatzes gezeigt werden kann.*

Bei der Frage nach der Existenz von Maxima von Funktionen ergibt sich analog wie bei den Zwischenwerten, daß reine Stetigkeit nicht ausreicht:

Beispiel 80 (Stetige Funktionen und Maxima) *Sei f auf $[-1,+1]$ definiert wie folgt:*

$f(x) = x - X$, *wobei X die (eindeutige) zu x nächste reelle Zahl ist.*

Dann ist f auf $[-1,+1]$ gleichartig stetig; man wähle stets $\delta = \epsilon$. Weiter ist f auf [-1,+1] nach oben beschränkt durch jede positive reelle Zahl. Aber die Funktion nimmt kein Maximum an; Annahme, M wäre ein Maximum. Ist M nicht unendlich klein, so wird es von f nicht erreicht, da die Wertemenge nur unendlich kleine Zahlen enthält. Ist M dagegen unendlich klein, so wird es von f übertroffen; zum Beispiel nimmt f an der Stelle $2 \cdot M \in [-1,+1]$ den Wert $2 \cdot M$ an, was sicherlich M übersteigt.

Satz 81 (Satz vom Maximum) *Sei f eine skalierte gewöhnliche Funktion auf dem Intervall $[a,b]$. Sei f dort stetig und im Innern des Intervalles mindestens einmal gleichartig differenzierbar, und sei an jedem Punkt mindestens eine Ableitung ungleich Null. Dann nimmt f auf dem Intervall ein Maximum an.*

Beweis:
Wähle ähnlich wie im letzten Beweis zunächst die zugrundeliegende gewöhnliche Funktion, und dann ihre auf R eingeschränkte Funktion F. Bestimme deren Maximum X. Sei die $n-te$ Ableitung von F die kleinste nichtverschwindende Ableitung. Dann ist n gerade, und $F^{(n)}(X)$ negativ. Damit ist in der unendlich kleinen Umgebung der dominierende Term der Term

$F^{(n)}(X) \cdot x^n$, und dieser hat an Null ein Maximum. Somit ist X sogar ein Maximum von f. $\mathcal{QED}$

Satz 82 (Satz von Rolle) *Sei f wie im letzen Satz, Sei $f(a) = f(b) = 0$, dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis:
Ist $f \equiv 0$, dann gilt die Behauptung offenbar. Sei f also nicht identisch Null. Dann nimmt f im Innern des Intervalls nach dem letzen Satz ein Maximum an. An diesem Maximum verschwindet, wie bereits im letzen Satz gezeigt, die Ableitung, womit die Aussage gezeigt ist. $\mathcal{QED}$

3.4 Mittelwertsatz und Taylor'scher Satz

Genau wie in der konventionellen Differentialrechnung erhält man aus dem Satz von Rolle den Mittelwertsatz:

Satz 83 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Seien f, g skalierte gewöhnliche Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$. Seien sie dort stetig und im Innern des Intervalles mindestens einmal gleichartig differenzierbar, und sei an jedem Punkt mindestens eine Ableitung ungleich Null. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = f'(\xi)/g'(\xi)$$

Beweis:
Definiere die Funktion h auf $[a,b]$:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

Dann gilt offenbar $h(a) = h(b) = 0$. Somit gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Damit folgt aber wegen $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$ die Behauptung. $\mathcal{QED}$

Genau wie in der reellen Analysis erhält man aus dem Mittelwertsatz den Taylor'schen Satz:

Satz 84 (Satz von Taylor). *Sei f eine skalierte gewöhnliche Funktion auf dem Intervall $[x_0, x_0 + h]$. Sei sie dort stetig und im Innern des Intervalles mindestens einmal gleichartig differenzierbar, und sei an jedem Punkt mindestens eine Ableitung ungleich Null. Dann gilt*

$$f(x_0+h) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{\nu}(x_0)}{\nu!} \cdot h^{\nu} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{g'(x_0+\theta h)} \cdot \frac{(1-\theta)^n}{n!} h^n f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$$

Beweis:
Zunächst schreiben wir den Mittelwertsatz mittels $x_1 - x_0 = h$ und $\xi = x_0 + \theta h$ in der folgenden Form:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{g'(x_0+\theta h)} \cdot f'(x_0+\theta h)$$

Diese Formel wird angewendet auf die Funktion

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}(x_0+h-x)^{\nu}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
F(x_0) &= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} h^{\nu} \\
F(x_0+h) &= f(x_0+h) \\
F'(x) &= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu+1)}(x)}{\nu!}(x_0+h-x)^{\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x)}{(\nu-1)!}(x_0+h-x)^{\nu-1} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} \cdot (x_0+h-x)^n
\end{aligned}$$

erhält man schließlich

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h) &= F(x_0+h) = F(x_0) + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{g'(x_0+\theta h)} F'(x_0+\theta h) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^{\nu} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{g'(x_0+\theta h)} \cdot \frac{(1-\theta)^n}{n!} h^n f^{(n+1)}(x_0+\theta h)
\end{aligned}
$$

Für verschiedene Wahlen von $g(x)$ erhält man analog zur Situation in R die verschiedenen Restgliedformeln. $\mathcal{QED}$